ЛЕКЦИЯ 1

Глава I.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $\mathbb{R}^n$

§1. Псевдодифференциальные операторы и их символы

1. Обозначения. Полагаем

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}_+, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\partial_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

$$D_j = -i\partial_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Подробности к сказанному в следующих двух пунктах можно найти, например, в лекциях предыдущего семестра.

2. Пространство Шварца быстро убывающих функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из бесконечно гладких комплекснозначных функций $u(x)$ с конечными нормами

$$|\langle u \rangle|_N = \sup(1 + |x|)^{|\alpha|} |\partial^\beta u(x)|, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем x и всем α, β с $|\alpha| + |\beta| \le N$. Здесь N пробегает все целые неотрицательные числа. Эти нормы определяют топологию в $\mathcal{S}$. В частности, последовательность функций u_k из $\mathcal{S}$ сходится к функции u в этом пространстве, если сходится к ней в каждой из этих норм.

Если $u(x) \in \mathcal{S}$, то $x^\alpha \partial^\beta u(x) \in \mathcal{S}$.

3. Преобразования Фурье. *Прямое преобразование Фурье* определяется например, на функциях из $\mathcal{S}$ формулой

$$v(\xi) = (Fu)(\xi) = F[u(x)] = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx. \tag{2}$$

Здесь и дальше

$$x \cdot \xi = \sum_1^n x_j \xi_j.$$

Как легко проверить, преобразование (2) переводит $D_j u(x)$ в $\xi_j v(\xi)$ и поэтому $D^\alpha u(x)$ в $\xi^\alpha v(\xi)$. Далее, оно переводит $x_j u(x)$ в $-D_j v(\xi)$ (здесь D_j – производная по ξ_j) и поэтому $x^\alpha u(x)$ – в $(-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha v(\xi)$. Это позволяет проверить, что оператор F отображает пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функций от x в пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функций от ξ. Доказывается, что *это непрерывный в обе стороны изоморфизм.* В частности, для любого N найдется такое N', что

$$|\langle Fu \rangle|_N \le C_{N,N'} |\langle u \rangle|_{N'}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

(непрерывность F). Обратным является оператор *обратного преобразования Фурье*

$$u(x) = (F^{-1}v)(x) = F^{-1}[v(\xi)] = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}v(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

4. Представление оператора в частных производных при помощи преобразований Фурье. Рассмотрим линейный оператор в частных производных порядка m

$$a(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha \tag{4}$$

с коэффициентами из пространства $\mathcal{B}^\infty$ бесконечно гладких функций $a(x)$, у которых каждая производная $\mathcal{D}^\beta a(x)$ ограничена. Такой оператор действует, конечно, в $\mathcal{S}$, т.е. переводит это пространство в себя, и нетрудно проверить, что он действует непрерывно. Имеем

$$a(x,D)u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)F^{-1}\xi^\alpha(Fu)(\xi).$$

Положим

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{5}$$

Эта функция называется (*полным*) *символом* оператора (4); более старое ее название – характеристический многочлен. Отметим еще, что функция

$$a_0(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \tag{6}$$

называется *главным символом* оператора $a(x,D)$. Мы имеем

$$a(x,D)u(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[a(x,\xi)F_{y\to\xi}u(y)], \tag{7}$$

или

$$a(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi. \tag{8}$$

Здесь сначала производится интегрирование по y.

По такой же формуле определяется и псевдодифференциальный оператор, но при этом символ $a(x,\xi)$ уже не обязательно является многочленом по ξ. Однако рассматривать произвольные символы бесполезно, и в следующем пункте мы определяем наиболее употребительные классы символов.

5. Классы символов S^m. Пусть m – *вещественное* число. Класс $S^m = S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ определим как состоящий из бесконечно гладких комплекснозначных функций $a(x,\xi)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \tag{9}$$

при любых α, β. В дальнейшем это будут символы ПДО – псевдодифференциальных операторов. Число m можно назвать порядком символа. (Пока это не

очень точное определение порядка.) Порядок не меняется при дифференцировании по x и понижается на единицу при дифференцировании по ξ.

Если m – натуральное число, то рассмотренный выше символ дифференциального оператора, очевидно, принадлежит S^m.

Еще один пример: при любом вещественном m функция $(1+|\xi|^2)^{m/2}$ принадлежит S^m (проверьте самостоятельно).

Топология в S^m определяется при помощи норм

$$|[a]|_N = \sup(1+|\xi|)^{-m+|\beta|}|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|, \tag{10}$$

где верхняя грань берется по всем x, ξ и по всем α, β с $|\alpha|+|\beta| \le N$, а N пробегает целые неотрицательные числа.

Удобно положить

$$S^\infty = \cup_m S^m, \quad S^{-\infty} \cap_m S^m. \tag{11}$$

Отметим сразу следующие легко проверяемые свойства этих пространств.

1) Из $m_1 < m_2$ следует, что $S^{m_1} \subset S^{m_2}$.

2) При этом S^{m_1} плотно в S^{m_2}, а $S^{-\infty}$ плотно во всех S^m.

3) Если $a(x,\xi) \in S^m$, то $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in S^{m-|\beta|}$.

4) Если $a \in S^{m_1}$, $b \in S^{m_2}$, то $ab \in S^{m_1+m_2}$.

5) Если $a \in S^m$, $b \in S^{-\infty}$, то $ab \in S^{-\infty}$.

6. Классы Ψ^m псевдодифференциальных операторов. ПДО $a(x,D)$ из класса $\Psi^m = \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ – это оператор, определяемый формулой (7) или, что то же, (8), где символ $a(x,\xi)$ принадлежит S^m.

Приведем простейший пример ПДО, не являющегося, вообще говоря, дифференциальным оператором:

$$\Lambda^m = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{m/2}F. \tag{12}$$

Он будет полезен при рассмотрении ПДО в соболевских пространствах (см. лекции предыдущего семестра). Так как оператор Лапласа Δ имеет символ $-|\xi|^2$ (проверьте), то оператор (12) часто записывают так: $(1-\Delta)^{m/2}$. Это, вообще говоря, дробная степень оператора $1-\Delta$.

На следующей лекции будет проверена

Теорема 1. *Псевдодифференциальный оператор из Ψ^m действует непрерывным образом в пространстве Шварца.*

Псевдодифференциальные операторы были введены в 60-х гг. прошлого века. Первоначально потребность в них состояла в том, чтобы облегчить гомотопии при решении проблемы вычисления индекса эллиптического дифференциального оператора на замкнутом многообразии. Что такое эллиптический оператор на замкнутом многообразии (т.е. компактном многообразии без края), пока говорить рано. Наши лекции на самом деле нацелены на построение теории эллиптических ПДО на замкнутом многообразии. Эллиптичность дифференциального оператора (4) в $\mathbb{R}^n$ определяется следующим условием, накладываемым на его главный символ (6):

$$|a(x,\xi)| \ge c|\xi|^m, \tag{13}$$

где c – положительная постоянная. Рано говорить пока и о том, что такое индекс эллиптического оператора на замкнутом многообразии. Задача вычисления индекса эллиптического оператора была поставлена И.М. Гельфандом и привлекла внимание очень многих математиков. Она была решена в топологических терминах, для чего и потребовались гомотопии – непрерывные преобразования эллиптических символов. Построение нужных гомотопий очень сильно облегчается, если вместо многочленов можно рассматривать более общие функции.

Однако с появлением ПДО быстро выяснилось, что они присутствуют всюду в анализе и в особенности в теории уравнений в частных производных. Было построено исчисление ПДО, и оказалось, что оно вобрало в себя технические трудности, которые до этого врозь преодолевались в многочисленных специальных ситуациях в теории уравнений в частных производных.

Псевдодифференциальный оператор может иметь и отрицательный порядок m, и тогда это интегральный оператор, причем охваченными оказываются важнейшие интегральные операторы математической физики.

Мы начинаем с освоения исчисления ПДО. Класс символов выбран простейший, и его хватит для рассмотрения эллиптических ПДО. Обобщения будут указаны позднее.

Положим

$$\Psi^\infty = \cup_m \Psi^m, \quad \Psi^{-\infty} = \cap_m \Psi^m. \tag{14}$$

Исчисление ПДО строится "с точностью до прибавления" ПДО из $\Psi^{-\infty}$ (потом уточним, что здесь имеется в виду). Поэтому интересно выяснить, что собой представляют ПДО порядка $-\infty$, т. е. ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Так как символ такого ПДО быстро убывает при $\xi \to \infty$, то в (8) интегралы по y и ξ можно поменять местами. Получается, что ПДО $a(x, D)$ из $\Psi^{-\infty}$ – интегральный оператор

$$a(x, D)u(x) = \int k(x, y)u(y)\, dy, \tag{15}$$

где ядро $k(x, y)$ определяется формулой

$$k(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Обозначим через $K^{-\infty} = K^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ множество всех бесконечно гладких функций $k(x, y)$, удовлетворяющих неравенствам

$$(1 + |x - y|)^N |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x, y)| \le C_{\alpha,\beta,N} \tag{17}$$

при всех α, β и всех целых неотрицательных N. Смысл этих неравенств состоит в том, что все производные функции k быстро убывают при $|x-y| \to \infty$. На следующей лекции будет доказана

Теорема 2. *ПДО $a(x, D)$ принадлежит $\Psi^{-\infty}$ тогда и только тогда, когда он представим в виде* (15) *с ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим неравенствам* (17).

7. Асимптотические разложения символов. Пусть даны символы $a \in S^m$ и $a_j \in S^{m-j}$ $(j = 0, 1, \dots)$. Мы скажем, что символ a *разлагается в асимптотический ряд из символов* a_j, и будем писать

$$a \sim a_0 + a_1 + \dots, \tag{18}$$

если

$$a - \sum_0^{N-1} a_j \in S^{m-N} \tag{19}$$

при любом натуральном N.

Например, в случае дифференциального оператора (4) символ $a(x, \xi)$ есть сумма

$$a = a_0 + a_1 + \dots + a_m,$$

где

$$a_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m-j} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

и здесь вместо асимптотического ряда мы имеем конечную сумму. Последнее слагаемое не зависит от ξ.

На следующей лекции будет доказана теорема, подготавливающая построение символического исчисления:

Теорема 3. *Пусть дана последовательность символов* $a_j \in S^{m-j}$, $j = 0, 1 \dots$. *Тогда существует символ* a *с асимптотическим разложением* (18). *Разность двух символов с таким асимптотическим разложением принадлежит* $S^{-\infty}$.

Эта теорема принадлежит Хёрмандеру.

Забегая вперед, отметим, что две важнейшие теоремы символического исчисления – это теоремы о композиции двух ПДО и о ПДО, формально сопряженном к данному ПДО. В первой из них утверждается, что произведение двух ПДО – ПДО, и указывается рецепт построения по символам сомножителей асимптотического разложения для символа произведения. Во второй теореме утверждается, что оператор, формально сопряженный к ПДО, – ПДО, и указывается рецепт построения по символу данного ПДО асимптотического разложения символа формально сопряженного ПДО. Смысл слова “формально” будет объяснен.

ЛЕКЦИЯ 2

8. Доказательство теоремы 1. Запишем ПДО $A = a(x, D) \in S^m$ в виде

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) v(\xi)\, d\xi, \text{ где } v(\xi) = Fu.$$

Функция v принадлежит $\mathcal{S}$, поэтому быстро убывает, так что можно дифференцировать по x под знаком интеграла. Получаем

$$D^\alpha Au(x) = \int e^{-ix\cdot\xi} b_\alpha(x,\xi) v(\xi)\, d\xi,$$

и легко проверить, что $b_\alpha \in S^{m+|\alpha|}$. Ясно, что этот интеграл – ограниченная функция. Далее,

$$x^\beta D^\alpha Au(x) = \int [D_\xi^\beta e^{ix\cdot\xi}] b_\alpha(x,\xi) v(\xi)\, d\xi.$$

Здесь свойства подинтегральных функций позволяют проинтегрировать по частям, и мы получаем

$$x^\beta D^\alpha Au(x) = (-1)^{|\beta|} \int e^{ix\cdot\xi} D_\xi^\beta [b_\alpha(x,\xi) v(\xi)]\, d\xi.$$

Снова видно, что интеграл ограничен. Более того, для любого N мы можем найти такое N', что

$$|\langle Au\rangle|_N \le C_{N,N'} |\langle v\rangle|_{N'}.$$

А так как преобразование Фурье непрерывно отображает $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$, то для любого N найдется такое N'', что

$$|\langle Au\rangle|_N \le C'_{N,N''} |\langle u\rangle|_{N''}. \quad \square \tag{1}$$

9. Доказательство теоремы 2. Пусть $a \in S^{-\infty}$. Запишем формулу для ядра:

$$k(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Так как символ со всеми его производными быстро убывает при $\xi \to \infty$, то можно дифференцировать под знаком интеграла. Получаем

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a_{\alpha,\beta}(x,\xi)\, d\xi,$$

и легко видеть, что $a_{\alpha,\beta}(x,\xi) \in S^{-\infty}$. Далее,

$$(x-y)^\gamma \partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y) = \int D_\xi^\gamma [e^{i(x-y)\cdot\xi}] a_{\alpha,\beta}(x,\xi)\, d\xi.$$

Здесь быстрое убывание функции $a_{\alpha,\beta}(x,\xi)$ и ее производных позволяет проинтегрировать по частям и получить

$$(x-y)^\gamma \partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\xi)\, d\xi.$$

Символ $a_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\xi)$ снова принадлежит $S^{-\infty}$, так что интеграл ограничен. Таким образом, $k \in K^{-\infty}$.

Обратно, пусть $k(x,y) \in K^{-\infty}$. Подставим в интеграл

$$Au(x) = \int k(x,y)u(y)\, dy$$

выражение для $u(x)$ через обратное преобразование этой функции и поменяем местами интегралы (очевидно, что это можно сделать). Получим

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) v(\xi)\, d\xi,$$

где

$$a(x,\xi) = \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} k(x,y)\, dy = e^{-ix\cdot\xi} \int e^{iy\cdot\xi} k(x,y)\, dy. \tag{3}$$

Отсюда

$$\xi^\alpha a(x,\xi) = e^{-ix\cdot\xi} \int [D_y^\alpha e^{iy\cdot\xi}] k(x,y)\, dy,$$

и здесь справа производные переносятся на k интегрированием по частям. Получается ограниченный интеграл. Мы видим, что $a(x,\xi)$ быстро убывает при $\xi \to \infty$ равномерно по x. Проверьте самостоятельно, что то же верно для производных от a. (Например, при дифференцировании функции $a(x,\xi)$ по ξ_j происходит умножение ядра на $x_j - y_j$ с точностью до постоянного множителя.) $\square$

Замечание. Возможно другое написание ядра, и оно будет использоваться при рассмотрении ПДО конечного отрицательного порядка:

$$(2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi = \int K(x, x-y) u(y)\, dy,$$

где

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\xi} a(x,\xi) d\xi. \tag{4}$$

При такой записи ядро – обратное преобразование Фурье от символа по второму переменному, а символ – соответственно прямое преобразование Фурье от ядра по второму переменному:

$$a(x,\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} K(x,y)\, dy. \tag{5}$$

Пока мы не останавливаемся на выяснении того, в каком смысле и при каких условиях эти формулы корректны.

10. Доказательство теоремы 3. В этом доказательстве интересна прежде всего формула, по которой строится $a(x,\xi)$. Но доказательство достаточно деликатное.

Пусть $\theta(\xi)$ – функция из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная 0 при $|\xi|\le 1$ и 1 при $|\xi|\ge 2$, и пусть $\{\tau_j\}_0^\infty$ – возрастающая последовательность чисел, в которой первое число не меньше 1; она строится дальше. Положим

$$a(x,\xi)=\sum_0^\infty \theta(\xi/\tau_j)a_j(x,\xi). \tag{6}$$

При фиксированном (x,ξ) только конечное число членов этого ряда отлично от нуля, поэтому вопрос о сходимости не возникает.

Очевидно, что $\partial^\beta\theta(\xi)$ и $|\xi|^\beta\partial^\beta\theta(\xi)$ – ограниченные функции, поэтому

$$|\partial_\xi^\beta\theta(\xi/\tau)|\le C_\beta(1+|\xi|)^{-|\beta|}\quad(\tau\ge 1,\xi\in\mathbb{R}^n).$$

Отсюда следует, что

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\theta(\xi/\tau)a_j(x,\xi)]|\le C_{\alpha,\beta,j}(1+|\xi|)^{m-|\beta|-j} \tag{7}$$

при $\tau\ge 1$ и всех x, ξ.

Очевидно, что при фиксированных α,β,j и достаточно большом τ

$$C_{\alpha,\beta,j}\le 2^{-j}(1+|\xi|)\ \text{ для }\ |\xi|>\tau/2. \tag{8}$$

Мы выберем $\tau_j>\tau_{j-1}$ так, чтобы

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\theta(\xi/\tau_j)a_j(x,\xi)]|\le 2^{-j}(1+|\xi|)^{1+m-|\beta|-j} \tag{9}$$

что возможно в силу (7) и (8). Грубо говоря, по сравнению с (7) мы справа увеличили степень множителя $1+|\xi|$ на 1, но зато числовой множитель заменили на 2^{-j}.

Теперь функция $a(x,\xi)$ полностью определена. Зафиксируем α,β,N и положим $N'=\max(|\alpha|+|\beta|,N+1)$. Нам надо оценить

$$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\left[a(x,\xi)-\sum_0^N a_j(x,\xi)\right]=\sum_1+\sum_2+\sum_3. \tag{10}$$

Здесь

$$\sum_1=\sum_0^N\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\{[\theta(\xi/\tau_j)-1]a_j(x,\xi)\}\in S^{-\infty}, \tag{11}$$

так как эта функция равна нулю при больших ξ. Далее,

$$\sum_2 = \sum_{N+1}^{N'} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\theta(\xi/\tau_j) a_j(x,\xi)]$$

и

$$|\sum_2| \le C(1+|\xi|)^{m-|\beta|-(N+1)} \tag{12}$$

в силу (7). Наконец,

$$\sum_3 = \sum_{N'+1}^{\infty} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\theta(\xi/\tau_j)]$$

удовлетворяет неравенству (здесь мы суммируем правые части в (9))

$$|\sum_3| \le C'(1+|\xi|)^{m-|\beta|-(N+1)}. \tag{13}$$

Мы видим, что модуль левой части в (10) не превосходит

$$C''(1+|\xi|)^{m-|\beta|-(N+1)},$$

что и требовалось показать.

Осталось заметить, что если функции a и $\widetilde{a}$ имеют одно и то же асимптотическое разложение $a_0 + \dots + a_N + \dots$, то

$$a - \widetilde{a} = \{a - [a_0 + \dots + a_N]\} - \{\widetilde{a} - [a_0 + \dots + a_N]\} \in S^{m-N-1}$$

при любом N. $\square$

11. Проверка асимптотичности разложения. Следующая теорема облегчает эту проверку.

Теорема 4. *Предположим, что*

$$a(x,\xi) \in C^\infty, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\mu_{\alpha,\beta}}, \tag{14}$$

$$a_j(x,\xi) \in S^{m-j} \quad (j = 0, 1, \dots), \tag{15}$$

$$\left| a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{l-1} a_j(x,\xi) \right| \le C_l (1+|\xi|)^{r_l}, \quad r_l \to -\infty. \tag{16}$$

Тогда $a \in S^m$ *и* $a \sim a_0 + a_1 + \dots$.

В частности, условие (14) выполнено, если $a \in S^\infty$, а условие (16) достаточно считать выполненным с $r_l = m - l$ (без каких-либо дифференцирований).

Доказательство будет обсуждаться на следующей лекции.

ЛЕКЦИЯ 3

Доказательство теоремы 4. Нужно проверить неравенства

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N} a_j(x,\xi)\right]\right| \le C_{\alpha,\beta,N}(1+|\xi|)^{m-N-|\beta|-1}, \tag{17}$$

и это делается индуктивно по $|\alpha| + |\beta|$. Но мы ограничимся первыми двумя шагами.

1) $|\alpha| = |\beta| = 0$. Берем $l > N$ с $r_l < m - N - 1$ и используем (15), (16).

2) $|\alpha| + |\beta| = 1$. Нам понадобится следующая известная лемма.

Лемма. *Пусть* $f \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R})$ *и* $M_j = \sup |f^{(j)}(t)|$, $j = 0, 1, 2$. *Тогда*

$$M_1^2 \le 4M_0M_2. \tag{18}$$

Ее доказательство пока отложим. Закончим рассмотрение случая 2).

Положим $\mu = \max_{|\alpha|+|\beta|\le 2} \mu_{\alpha,\beta}$ и предположим, не теряя общности, что $\mu > m$.

Используя (14), (15), результат 1) и лемму, получим для $|\alpha|+|\beta| = 1$, $N' \ge N$

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N'} a_j(x,\xi)\right]\right|^2 \le 4(1+|\xi|)^{m-N'-1}(1+|\xi|)^{\mu},$$

и здесь

$$\frac{m - N' - 1 + \mu}{2} \le m - N - 1 - |\beta|$$

при достаточно большом $N' > N$. Остается использовать (15) для $j > N$. □

Доказательство леммы. Воспользуемся формулой Тейлора

$$f(t+\tau) = f(t) + \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{2} f''(t+\theta\tau), \quad \theta \in (0,1).$$

Выражая отсюда первую производную, получаем

$$M_1 \le \frac{2M_0}{\tau} + \frac{\tau M_2}{2}. \tag{19}$$

Правая часть достигает минимума при $2M_0/\tau^2 = M_2/2$. Соответствующее τ равно $2\sqrt{M_0/M_2}$. Подставляя его в (19), получаем

$$M_1 \le 2\sqrt{M_0M_2}. \quad \square$$

§2. Исчисление ПДО в $\mathbb{R}^n$

1. Анализ оператора более общего вида. Рассмотрим оператор вида

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi. \tag{1}$$

Здесь вместо символа $a(x,\xi)$ стоит функция $p(x,y,\xi)$, называемая *амплитудой*, от трех групп переменных, причем x, y, ξ имеют одинаковую размерность n. Функция u по-прежнему берется из пространства Шварца.

Заметим, что мы могли определить пространство $S(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, не предполагая, что $n_1 = n_2$. Сейчас мы предположим, что

$$p(x,y,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Это пространство состоит из бесконечно гладких функций p, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma p(x,y,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-\gamma} \tag{3}$$

при всех α, β, γ.

Мы докажем, что (1) – ПДО из $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, и вычислим асимптотическое разложение его символа.

Но сначала мы "развяжем себе руки" в отношении порядка интегрирования. Если $m < -n$, то интеграл (1) абсолютно сходится, но при $m \ge -n$ мы пока должны считать, что интегрирование по y предшествует интегрированию по ξ. Поясним, что интеграл

$$v(x,\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} p(x,y,\xi) u(y)\, dy$$

абсолютно сходится и не превосходит $C(1+|\xi|)^m$, но то же верно для $\xi^\alpha v(x,\xi)$ при любом α (это проверяется интегрированием по частям по y), поэтому он быстро убывает при $\xi \to \infty$, так что интеграл

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} v(x,\xi)\, d\xi$$

тоже абсолютно сходится.

Однако интеграл (1) *допускает регуляризацию*, после которой порядок интегрирования перестает играть существенную роль.

Первый способ регуляризации состоит в следующем. Возьмем функцию $\theta_0(x)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 вблизи начала. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости,

$$\begin{aligned} Au(x) &= (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon\to 0} \int \theta_0(\varepsilon\xi) e^{ix\cdot\xi} v(x,\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \theta_0(\varepsilon\xi) e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi, \end{aligned}$$

и здесь "двойной" интеграл под знаком предела абсолютно сходится.

Мы укажем еще второй способ регуляризации, но пользоваться будем только первым. Введем оператор

$$L = (1 + |\xi|^2)^{-1}\Big(\sum_1^n \xi_j D_j + 1\Big), \tag{4}$$

где $D_j = -i\partial/\partial y_j$. Мы имеем

$$e^{-iy\cdot\xi} = -Le^{-iy\cdot\xi} = \cdots = (-1)^k L^k e^{-iy\cdot\xi}. \tag{5}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} v(x,\xi) &= (-1)^k \int L^k e^{-iy\cdot\xi}[p(x,y,\xi)u(y)]\,dy \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi} L^k[p(x,y,\xi)u(y)]\,dy \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi} \sum_{|\alpha|\le k} p_\alpha(x,y,\xi) D^\alpha u(y)\,dy, \end{aligned}$$

и легко проверить, что здесь $p_\alpha \in S^{m-k}$. Таким образом,

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \sum_{|\alpha|\le k} p_\alpha(x,y,\xi) D^\alpha u(y)\,dy. \tag{6}$$

Здесь надо взять такое k, что $m-k < -n$, и тогда "двойной" интеграл справа будет абсолютно сходящимся. Это и есть второй способ регуляризации.

В дальнейшем используется обозначение $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

Теорема 1. *Пусть $p(x,y,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$. Тогда A – ПДО из Ψ^m с символом*

$$a(x,\xi) \sim \sum_\alpha p_\alpha(x,\xi), \tag{7}$$

где

$$p_\alpha(x,\xi) = \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha p(x,y,\xi)\big|_{y=x} \in S^{m-|\alpha|}. \tag{8}$$

Доказательство. Объясним, как возникает формула (7). Разложим $p(x,y,\xi)$ как функцию от y по формуле Тейлора по степеням $y-x$ с центром разложения в точке x:

$$p(x,y,\xi) = \sum_{|\alpha|\le N} q_\alpha(x,\xi)(y-x)^\alpha + \rho_N(x,y,\xi), \tag{9}$$

где

$$q_\alpha(x,\xi) = \frac{1}{\alpha!}\partial_y^\alpha p(x,y,\xi)\big|_{y=x} \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \tag{10}$$

Остаток ρ_N мы выпишем позднее. Слагаемым в сумме (9) отвечают операторы

$$(2\pi)^{-n}\iint(-1)^{\alpha}[D_{\xi}^{\alpha}e^{i(x-y)\cdot\xi}]q_{\alpha}(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi.$$

Если $m<-n$, то можно переставить интегралы по y и по ξ и проинтегрировать по частям по ξ. Эти операторы примут вид

$$(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}p_{\alpha}(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi. \tag{11}$$

Если же условие $m<-n$ не выполнено, то тот же результат получается при помощи (первой) регуляризации. А именно, мы должны рассмотреть

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint(-1)^{\alpha}[D_{\xi}^{\alpha}e^{i(x-y)\cdot\xi}]\theta_0(\varepsilon\xi)q_{\alpha}(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}D_{\xi}^{\alpha}[\theta_0(\varepsilon\xi)q_{\alpha}(x,\xi)]u(y)\,dy\,d\xi.$$

Здесь производная $D_{\xi}^{\alpha}[\dots]$ вычисляется по формуле Лейбница. Это линейная комбинация произведений функций $D_{\xi}^{\beta}q_{\alpha}(x,\xi)\in S^{m-|\beta|}$ и $D_{\xi}^{\gamma}\theta_0(\varepsilon\xi)$, $\beta+\gamma=\alpha$. Очевидно, что при $\varepsilon\to 0$ поточечно

$$\theta_0(\varepsilon\xi)\to 1,\quad D_{\xi}^{\gamma}\theta_0(\varepsilon\xi)\to 0\ \ (\gamma\neq 0).$$

Лемма.

$$|\partial_{\xi}^{\gamma}[\theta_0(\varepsilon\xi)]|\le C_{\gamma}(1+|\xi|)^{-\gamma}, \tag{12}$$

где C_{γ} не зависит от ε.

Действительно, $\xi^{\gamma}\partial_{\xi}^{\gamma}\theta_0(\xi)$ – ограниченная функция, так что

$$\xi^{\gamma}\partial_{\xi}^{\gamma}[\theta_0(\varepsilon\xi)]=\varepsilon^{|\gamma|}\xi^{\gamma}(\partial_{\xi}^{\gamma}\theta_0)(\varepsilon\xi)$$

– функция, равномерно ограниченная по ε и ξ.

Теперь имеем

$$\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}D_{\xi}^{\beta}q_{\alpha}(x,\xi)D_{\xi}^{\gamma}\theta_0(\varepsilon\xi)u(y)\,dy\,d\xi=\int e^{ix\cdot\xi}D_{\xi}^{\beta}q_{\alpha}(x,\xi)D_{\xi}^{\gamma}\theta_0(\varepsilon\xi)v(\xi)\,d\xi,$$

где $v=Fu$, и здесь в последнем интеграле подинтегральное выражение имеет интегрируемую мажоранту, не зависящую от ε. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, при $\varepsilon\to 0$ интеграл сходится к 0 при $\gamma\neq 0$ и к

$$\int e^{ix\cdot\xi}p_{\alpha}(x,\xi)v(\xi)\,d\xi$$

при $\gamma=0$, т.е. у нас опять получается оператор (11).

По правой части в (7) символ $a(x,\xi)$ строится по теореме Хёрмандера.

Теперь надо исследовать остаточный член в формуле Тейлора (9). Его можно записать в интегральной форме, придав ему вид

$$\rho_N(x,y,\xi) = \sum_{|\beta|=N+1} \rho_\beta(x,y,\xi)(y-x)^\beta, \tag{13}$$

где

$$\rho_\beta(x,y,\xi) = \frac{N+1}{\beta!}\int_0^1 (1-\tau)^N (\partial_y^\beta p[x, x+\tau(y-x), \xi]\, d\tau \tag{14}$$

Это бесконечно гладкие функции. Формула есть в университетских учебниках по анализу. Функции ρ_β наследуют принадлежность к S^m. В дальнейшем используется только последнее обстоятельство.

Остаточному члену в формуле (9) отвечает оператор, который при помощи той же регуляризации записывается в виде

$$R_N u(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\beta|=N+1} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint (y-x)^\beta e^{i(x-y)\cdot\xi} \theta_0(\varepsilon\xi)\rho_\beta(x,y,\xi)u(y)\, d\xi\, dy.$$

Здесь

$$(y-x)^\beta e^{i(x-y)\cdot\xi} = (-1)^{|\beta|} D_\xi^\beta e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

Перенося D^β на $\theta_0(\varepsilon\xi)\rho_\beta(x,y,\xi)$ и используя при предельном переходе такие же соображения, как выше, мы получаем, что

$$R_N u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} r_N(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi, \tag{15}$$

где

$$r_N(x,y,\xi) = \sum_{|\beta|=N+1} D_\xi^\beta \rho_\beta(x,y,\xi) \in S^{m-N-1}(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n). \tag{16}$$

ЛЕКЦИЯ 4

Итак, мы имеем

$$A - a(x,D) = [A - \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x,D)] - [a(x,D) - \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x,D)] = R_N - \widetilde{R}_N,$$

где

$$R_N u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} r_N(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi \tag{16}$$

– оператор с амплитудой $r_N \in S^{m-N-1}$ и

$$\widetilde{R}_N u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \widetilde{r}_N(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi \tag{17}$$

– ПДО с символом

$$\widetilde{r}_N(x,\xi) = a(x,\xi) - \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x,\xi) \in S^{m-N-1}.$$

Считая, что $m - N - 1 < -n$, мы можем переписать оба эти оператора в виде интегральных операторов:

$$R_N u(x) = \int k_N(x,y) u(y)\, dy \ \text{ и } \ \widetilde{R}_N u(x) = \int \widetilde{k}_N(x,y) u(y)\, dy. \tag{18}$$

Свойства их ядер улучшаются с ростом N, и в итоге получается, что $A - a(x,D)$ – оператор с ядром из $K^{-\infty}$, так что это ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Детали проверьте самостоятельно, используя соображения из доказательства теоремы о ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Таким образом, A – ПДО из Ψ^m с указанным выше асимптотическим разложением символа. □

Отметим, что в формуле (8) можно заменить (одновременно) D_ξ и ∂_y на ∂_ξ и D_y. Это замечание относится и к некоторым дальнейшим формулам.

2. Оператор, формально сопряженный к ПДО. Пусть A и $A^{(*)}$ – операторы, действующие для простоты в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Оператор $A^{(*)}$ называется *формально сопряженным* к A, если

$$(Au, v) = (u, A^{(*)}v) \quad (u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)). \tag{1}$$

Здесь и дальше (u,v) – обычное скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$(u,v) = \int u(x)\overline{v(x)}\, dx. \tag{2}$$

Слово “формально” подчеркивает то обстоятельство, что операторы A и $A^{(*)}$ не рассматриваются как операторы в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (ограниченные или неограниченные).

Примеры. 1.Пусть A – интегральный оператор

$$Au(x) = \int k(x,y)u(y)\,dy \tag{3}$$

с ядром, скажем, из $L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Тогда $A^{(*)}$ – тоже интегральный оператор:

$$A^{(*)}v(y) = \int \overline{k(x,y)}v(x)\,dx. \tag{4}$$

2. Пусть A – дифференциальный оператор

$$A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha \tag{5}$$

для простоты с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда $A^{(*)}$– тоже дифференциальный оператор:

$$A^{(*)} = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha[\overline{a_\alpha(x)}\cdot]. \tag{6}$$

Проверьте это самостоятельно. В этих примерах соотношение (1) распространяется на более широкие классы функций. А именно, в первом случае операторы являются ограниченными в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и соотношение (1) распространяется на функции u, v из $L_2(\mathbb{R}^n)$. В втором случае мы имеем ограниченные операторы из соболевского пространства $H^m(\mathbb{R}^n)$ (см. лекции предыдущего семестра) в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и соотношение (1) распространяется на функции u, v из $H^m(\mathbb{R}^n)$. Сейчас мы рассмотрим ПДО, для них у нас пока нет теоремы об ограниченности в соболевских пространствах.

Теорема 2. *Пусть A – ПДО из Ψ^m с символом $a(x,\xi)$. Тогда существует формально сопряженный оператор $A^{(*)}$, и это ПДО из Ψ^m с символом $a^{(*)}(x,D)$, имеющим асимптотическое разложение*

$$a^{(*)}(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \overline{a(x,\xi)}. \tag{7}$$

Доказательство. Запишем Au в виде

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) Fu(\xi)\,d\xi.$$

Имеем

$$(Au,v) = (2\pi)^{-n} \int \overline{v(x)} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) Fu(\xi)\,d\xi\,dx = (2\pi)^{-n} \int Fu(\xi)\overline{w(\xi)}\,d\xi,$$

где (мы заменяем x на y)

$$w(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} \overline{a(y,\xi)} v(y)\,dy.$$

Как нетрудно проверить, это функция из пространства Шварца. (Очевидно, что $|w(\xi)| \le C(1+|\xi|)^m$, но аналогичная оценка получается для $\xi^\alpha w(\xi)$ и $\xi^\alpha D_\xi^\beta w(\xi)$.) Воспользуемся равенством Парсеваля

$$(2\pi)^{-n}\int Fu(\xi)\overline{w(\xi)}\,d\xi = \int u(x)\overline{F^{-1}w(x)}\,dx$$

(или, что то же, подставим $Fu(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$ и переставим интегралы). Мы видим, что

$$(Au,v)=(u,A^{(*)}v),$$

где

$$A^{(*)}v(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\overline{a(y,\xi)}v(y)\,dy\,d\xi. \tag{8}$$

Теперь воспользуемся теоремой 1. Оператор $A^{(*)}$ – это ПДО с не зависящей от x амплитудой $\overline{a(y,\xi)}$, он принадлежит Ψ^m, и эта теорема дает нам асимптотическое разложение (7) символа $a^{(*)}$. $\square$

В дальнейшем мы будем рассматривать и матричные ПДО с матричными символами, переводящие вектор-функции в вектор-функции. В этом случае только что доказанная теорема тоже верна, но в формуле (7) надо заменить комплексно-сопряженную к a функцию $\overline{a}$ эрмитово-сопряженной к a матрицей a^*:

$$a^{(*)}\sim\sum\frac{1}{\alpha!}D_\xi^\alpha\partial_x^\alpha a^*(x,\xi). \tag{9}$$

3. Формально транспонированный оператор. Положим

$$\langle u,v\rangle=\int uv\,dx. \tag{10}$$

Назовем оператор $A^{(t)}$ *формально транспонированным к* A, если

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,A^{(t)}v\rangle\quad(u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)). \tag{11}$$

Это соотношение равносильно соотношению

$$(Au,\overline{v})=(u,\overline{A^{(t)}v}),$$

так что

$$A^{(t)}v=\overline{A^{(*)}\overline{v}},\ \text{ или }\ A^{(*)}v=\overline{A^{(t)}\overline{v}}. \tag{12}$$

Если A – ПДО из Ψ^m с символом $a(x,\xi)$, то из формулы (8) получаем

$$A^{(t)}v(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{-i(x-y)\cdot\xi}a(y,\xi)v(y)\,dy\,d\xi.$$

Но здесь необычный знак в экспоненте. Заменяя ξ на $-\xi$, получаем

$$A^{(t)}v(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(y,-\xi)v(y)\,dy\,d\xi. \tag{13}$$

Используя теперь теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть A – ПДО из Ψ^m с символом $a(x,\xi)$. Тогда $A^{(\prime)}$ – ПДО из Ψ^m с символом $a^{(\prime)}(x,\xi)$, имеющим следующее асимптотическое разложение*:

$$a^{(\prime)}(x,\xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha [a(x,-\xi)]. \tag{14}$$

4. Дуальное представление ПДО. Заметим, что $(A^{(\prime)})^{(\prime)} = A$ (и также $(A^{(*)})^{(*)} = A$). Поэтому наш ПДО $A = a(x,D)$ допускает запись

$$a(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a_d(y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi, \tag{15}$$

где $a_d(y,\xi) = a^{(\prime)}(y,-\xi)$, или

$$a_d(x,\xi) = a^{(\prime)}(x,-\xi). \tag{16}$$

Эта функция называется *дуальным символом* ПДО A, а формула (15) – его *дуальным представлением.* Таким образом, дуальное представление имеет вид

$$a(x,D)u(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[F_{y\to\xi}[a_d(y,\xi)u(y)]] \tag{17}$$

в отличие от обычного представления

$$a(x,D)u(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[a(x,\xi)F_{y\to\xi}[u(y)]]. \tag{18}$$

Используя формулы (14) и (16), получаем *асимптотическое разложение для дуального символа*

$$a_d(x,\xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha a(x,\xi). \tag{19}$$

Отметим, что если дифференциальный оператор записан в виде

$$a(x,D)u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha [b_\alpha(x)u(x)], \tag{20}$$

то его дуальный символ есть

$$a_d(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{21}$$

Действительно, для оператора (21) имеем

$$a(x,D)u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} F^{-1}\xi^\alpha F[b_\alpha(x)u(x)],$$

и получается формула (17) с дуальным символом (21).

5. ПДО на обобщенных функциях. До сих пор мы рассматривали ПДО на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Используя дуальный к A ПДО $A^{(\prime)}$, можно распространить действие оператора A на обобщенные функции из пространства Шварца $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}$. Это делается по формуле

$$\langle Af, u\rangle = \langle f, A'u\rangle \quad (u \in \mathcal{S}, f \in \mathcal{S}'). \tag{22}$$

Здесь $\langle g, v\rangle$ – обозначение для результата применения функционала (обобщенной функции) g к основной функции v. Из теоремы 3 сразу получается

Теорема 4. *Псевдодифференциальный оператор A из Ψ^∞ действует непрерывным образом в $\mathcal{S}'$.*

Здесь непрерывность надо понимать в следующем смысле: если $f_m \to f$ в $\mathcal{S}'$ (т.е. $\langle f_m, u\rangle \to \langle f, u\rangle$ для любой функции $u \in \mathcal{S}$), то $Af_m \to Af$. Непрерывность проверяется очевидным образом:

$$\langle Af_m, u\rangle = \langle f_m, A^{(\prime)}u\rangle \to \langle f, A'u\rangle = \langle Af, u\rangle.$$

6. Формула для символа. В частности, имеет смысл $Ae^{ix\cdot\eta}$.

Теорема 4. *Для символа ПДО $A = a(x, D)$ имеет место формула*

$$a(x, \eta) = e^{-ix\cdot\eta}a(x, D_x)e^{ix\cdot\eta}. \tag{23}$$

Таким образом, символ ПДО однозначно определен эти оператором (в отличие от амплитуды).

Доказательство теоремы. Имеем

$$\langle Ae^{ix\cdot\eta}, u(x)\rangle = \langle e^{ix\cdot\eta}, A^{(\prime)}u(x)\rangle = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\int e^{ix\cdot\xi}\int e^{-iy\cdot\xi}a(y, -\xi)u(y)\,dy\,d\xi\,dx.$$

Заменим здесь ξ на $-\xi$. Получим, что это выражение равно

$$(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\int e^{-ix\cdot\xi}\left[\int e^{iy\cdot\xi}a(y, \xi)u(y)\,dy\right]d\xi\,dx.$$

Здесь два внешних интеграла с множителем $(2\pi)^{-n}$ – это обратное и прямое преобразования Фурье: $F^{-1}_{x\to\eta}F_{\xi\to x}$. Поэтому их можно убрать, заменив ξ на η в остающемся интеграле:

$$\langle Ae^{ix\cdot\eta}, u(x)\rangle = \int e^{iy\cdot\eta}a(y, \eta)u(y)\,dy = \langle e^{ix\cdot\eta}a(x, \eta), u(x)\rangle,$$

что и дает формулу (23).

7. Композиция двух ПДО. Следующая теорема, – может быть, важнейшая в исчислении ПДО.

Теорема 5. *Пусть $A = a(x, D)$ и $B = b(x, D)$ – ПДО соответственно из Ψ^{m_1} и Ψ^{m_2}. Тогда $C = BA$ – ПДО из $\Psi^{m_1+m_2}$ с символом $c(x, \xi)$, имеющим асимптотическое разложение*

$$c(x, \xi) \sim \sum \frac{1}{\alpha!}D^\alpha_\xi b(x, \xi)\partial^\alpha_x a(x, \xi). \tag{24}$$

ЛЕКЦИЯ 5.

Доказательство теоремы 5. Мы запишем ПДО B в обычной форме и ПДО A в дуальной форме:

$$(Bv)(x) = F^{-1}_{\xi\to x} b(x,\xi) F_{z\to\xi}[v(z)], \tag{25}$$

где

$$v(z) = (Au)(z) = F^{-1}_{\xi\to z} F_{y\to\xi}[a_d(y,\xi)u(y)]. \tag{26}$$

Подставим (26) в (25) и опустим $F_{z\to\xi}F^{-1}_{\xi\to z}$. Получим

$$Cu(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[b(x,\xi)F_{y\to\xi}[a_d(y,\xi)u(y)]] = (2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi} b(x,\xi)a_d(y,\xi)\,dy\,d\xi. \tag{27}$$

Это ПДО с амплитудой $b(x,\xi)a_d(y,\xi) \in S^{m_1+m_2}$. Его символ $c(x,\xi)$ имеет асимптотическое разложение

$$c(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi [b(x,\xi)D^\alpha_x a_d(x,\xi)], \tag{25}$$

и здесь

$$a_d(x,\xi) \sim \sum \frac{1}{\beta!}(-1)^{|\beta|}\partial^\beta_\xi D^\beta_x a(x,\xi) \tag{26}$$

по формуле (19). Подставим (26) в (25) и вычислим ∂^α_ξ по *формуле Лейбница*

$$\partial^\alpha[f\cdot g] = \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\delta!}\partial^\gamma f\cdot\partial^\delta g.$$

Получим

$$c(x,\xi) \sim \sum_{\beta,\gamma,\delta} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\gamma!\delta!}\partial^\gamma_\xi b(x,\xi)\cdot\partial^{\beta+\delta}_\xi D^{\beta+\gamma+\delta}_x a(x,\xi) \tag{27}$$

Это асимптотический ряд, в котором порядок слагаемых падает с ростом $|\beta|+|\gamma|+|\delta|$. Теперь мы воспользуемся *формулой Ньютона*

$$(\eta-\xi)^\varkappa = \sum_{\beta+\delta=\varkappa} \frac{\varkappa!}{\beta!\delta!}(-1)^{|\beta|}\xi^\beta\eta^\delta. \tag{28}$$

Полагая здесь $\xi=\eta=(1,\dots,1)$, получаем

$$0 = \sum_{\beta+\delta=\varkappa} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\delta!} \quad \text{при} \quad \varkappa \neq (0,\dots,0).$$

Поэтому формула (27) принимает вид

$$c(x,\xi) \sim \sum_\gamma \frac{1}{\gamma!}\partial^\gamma_\xi b(x,\xi)\cdot D^\gamma_x a(x,\xi). \quad \square$$

Замечания.

1. В этом асимптотическом разложении главный член есть ba.

2. Если A и B – скалярные ПДО, то для их *коммутатора*

$$[A,B]=AB-BA$$

получаем $[A,B]\in S^{m_1+m_2-1}$. В матричном случае это верно при условии перестановочности символов a и b. В частности, достаточно, чтобы один из этих символов был скалярной матрицей.

3. Для дифференциальных операторов доказанная формула допускает непосредственную проверку; при этом достаточно рассматривать "одночлены" $b(x)\partial_x^{m_2}$ и $a(x)\partial_x^{m_1}$.

8. Локальность дифференциальных операторов и псевдолокальность псевдодифференциальных операторов. Нам понадобятся определения, которые уже встречались в курсе обобщенных функций.

Определение 1. *Носителем* $\operatorname{supp} u$ непрерывыной функции $u(x)$ называется замыкание множества точек, в которых $u(x)\neq 0$. Носитель $\operatorname{supp} u$ можно также определить как наименьшее замкнутое множество, вне которого $u(x)=0$.

Предложение 1. *Пусть φ и ψ – две функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с не пересекающимися носителями. Тогда если A – дифференциальный оператор с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty$, то $\varphi A\psi\cdot$ – нулевой оператор, а если A – ПДО из Ψ^∞, то $\varphi A\psi\cdot$ – ПДО из $\Psi^{-\infty}$.*

Здесь первое утверждение очевидно. Второе проверяется при помощи теоремы о композиции. Действительно, если A имеет символ $a(x,\xi)$, то из определения ПДО видно, что φA – ПДО с символом $\varphi(x)a(x,\xi)$. Теперь применяем теорему о композиции к ПДО φA и оператору умножения на ψ. Получается ПДО с асимптотическим разложением символа, состоящим из одних нулей.

Определение 2. Для обобщенной функции u, например, из $\mathcal{S}'$ определим ее *носитель* $\operatorname{supp} u=F$ как наименьшее замкнутое множество, вне которого $u=0$. Это означает, что $\langle u,\varphi\rangle=0$, если носитель основной функции $\varphi\in\mathcal{S}$ содержится в дополнении к F.

Предложение 2. *Если A – дифференциальный оператор с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty$, то он обладает следующим свойством локальности*:

$$\operatorname{supp} Au\subset\operatorname{supp} u. \tag{29}$$

Действительно, если

$$A=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

то

$$\langle Au,\varphi\rangle=\langle u,\psi\rangle,\ \text{ где }\ \psi=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi,$$

и если носитель функции φ лежит в дополнении к $F = \operatorname{supp} u$, то то же верно для функции ψ, так что $\langle u, \psi \rangle = 0$.

Псевдодифференциальный оператор может быть интегральным оператором, так что в общем случае он не обладает свойством локальности.

Определение 3. Пусть $u(x)$ – обычная функция на $\mathbb{R}^n$. Ее *сингулярным носителем* $\operatorname{sing\,supp} u$ называется наименьшее замкнутое множество F, вне которого она является бесконечно гладкой функцией.

Определение 4. Пусть u – обобщенная функция, например, из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ее *сингулярным носителем* $\operatorname{sing\,supp} u$ называется наименьшее замкнутое множество F, вне которого она совпадает с бесконечно гладкой функцией.

Теорема 6. *Псевдодифференциальный оператор $A \in \Psi^\infty$ является псевдолокальным оператором в следующем смысле*:

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть Ω – дополнение к $F = \operatorname{sing\,supp} u$ и φ, φ_1, φ_2 – три бесконечно гладких функции с компактными носителями, лежащими внутри Ω, причем φ_1 равна 1 в окрестности носителя функции φ и φ_2 равна 1 в окрестности носителя функции φ_1. Имеем

$$\langle Au, \varphi \rangle = \langle Au, \varphi_1 \varphi \rangle = \langle \varphi_1 A \varphi_2 u, \varphi \rangle + \langle \varphi_1 A (1 - \varphi_2) u, \varphi \rangle. \tag{31}$$

Здесь $\varphi_2 u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, так как u – бесконечно гладкая функция в Ω; $A\varphi_2 u \in \mathcal{S}$, так как A действует в $\mathcal{S}$; $\varphi_1 A \varphi_2 u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Поэтому первое слагаемое справа в (31) – результат действия бесконечно гладкой функции на φ. Во втором слагаемом надо учесть определение действия ПДО на обобщенную функцию и то обстоятельство, что u как обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ есть конечная сумма производных в смысле обобщенных функций от непрерывных функций $u_\alpha(x)$ не выше чем степенного роста (см. лекции прошлого семестра):

$$u = \sum_{|\alpha| \le N} \partial^\alpha u_\alpha(x).$$

Это второе слагаемое переписывается в виде

$$\langle \sum_{|\alpha| \le N} \partial^\alpha u_\alpha(x), (1 - \varphi_2) A^{(\prime)} \varphi_1 \varphi \rangle. \tag{32}$$

Оператор, действующий здесь на φ, принадлежит $\Psi^{-\infty}$ в силу предложения 1, так что это интегральный оператор с ядром $k(x, y)$ из $K^{-\infty}$. Поэтому выражение (32) переписывается в виде линейной комбинации выражений

$$\langle u_\alpha(x), \partial_x^\alpha \int k(x, y) \varphi(y) \rangle. \tag{33}$$

Переносим производные на k дифференцированием под знаком интеграла, получается интегральный оператор с ядром $k_\alpha(x, y)$ снова из $K^{-\infty}$. Перебрасываем формально транспонированный оператор на $u_\alpha(x)$, это возможно, так как

$\varphi(y)$ имеет компактный носитель, а $k_\alpha(x,y)$ быстро убывает при удалении x от этого носителя. Выражение (33) после перестановки интегралов принимает вид

$$\langle g_\alpha(y), \varphi(y)\rangle, \ \text{где} \ \ g_\alpha(y) = \int k_\alpha(x,y)u_\alpha(x)\,dx$$

– бесконечно гладкая функция. $\square$

Замена переменных в ПДО. Рассмотрим ПДО

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi \tag{34}$$

из Ψ^m и две области Ω и $\widetilde{\Omega}$ в $\mathbb{R}^n$. Точки первой (и наборы их координат) будем обозначать через x, точки второй – через $\widetilde{x}$. Пусть эти области связаны диффеоморфизмом класса C^∞

$$\widetilde{x} = \varphi(x), \quad x = \psi(\widetilde{x}), \tag{35}$$

это взаимно обратные отображения. Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – две функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителями, лежащими внутри Ω. Им соответствуют бесконечно гладкие функции от $\widetilde{x}$

$$\beta_1(\widetilde{x}) = \alpha_1(\psi(\widetilde{x})), \quad \beta_2(\widetilde{x}) = \alpha_2(\psi(\widetilde{x}))$$

с носителями, лежащими в $\widetilde{\Omega}$, продолженные нулем вне $\widetilde{\Omega}$. Мы рассмотрим оператор

$$(\widetilde{A}v)(\widetilde{x}) = \alpha_1(x)A(\alpha_2 u)\big|_{x=\psi(\widetilde{x})}, \ \ \text{где} \ \ u = v[\varphi(x)] \ \ \text{в} \ \Omega.$$

Здесь подразумевается следующее. Функция v определена на $\mathbb{R}^n$. Функция u определена в Ω, а $\alpha_2 u$ продолжается нулем вне Ω.

Мы докажем, что это ПДО из Ψ^m, и вычислим асимптотическое разложение его символа. Но для простоты подробно рассмотрим только случай $m < -n$. Случай $m \geq -n$ рассматривается при помощи регуляризации.

Мы имеем

$$(\widetilde{A}v)(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n}\beta_1(\widetilde{x}) \iint e^{i[\psi(\widetilde{x})-y]\cdot\xi} a(\psi(\widetilde{x}),\xi)\alpha_2(y)u(y)\,dy\,d\xi.$$

Подставим $y = \psi(\widetilde{y})$ во внутреннем интеграле. Получим

$$(\widetilde{A}v)(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i[\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y})]\cdot\xi} b(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi)v(\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\,d\xi,$$

где

$$b(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi) = \beta_1(\widetilde{x})a(\psi(\widetilde{x}),\xi)\beta_2(\widetilde{y})\left|\det\frac{\partial\psi(\widetilde{y})}{\partial\widetilde{y}}\right|.$$

По формуле Адамара

$$\psi(\widetilde{x}) - \psi(\widetilde{y}) = \Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})(\widetilde{x} - \widetilde{y}), \tag{36}$$

где

$$\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{y}}[\widetilde{y} + t(\widetilde{x} - \widetilde{y})]\, dt. \tag{37}$$

Как известно, эта матрица бесконечно гладкая в $\widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$, и она обратима при $\widetilde{x} = \widetilde{y}$, будучи равна там $\partial\psi(\widetilde{x})/\partial\widetilde{x}$. Предположим, что матрица $\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ обратима при

$$|\widetilde{x} - \widetilde{y}| < \varepsilon, \quad \widetilde{x} \in \operatorname{supp} \beta_1, \quad \widetilde{y} \in \operatorname{supp} \beta_2. \tag{38}$$

Возьмем срезающую функцию $\theta_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 при $|x| \le \varepsilon/3$ и 0 при $|x| \ge 2\varepsilon/3$, и запишем $\widetilde{A}$ в виде суммы $\widetilde{A}_1 v + \widetilde{A}_2 v$, где

$$\widetilde{A}_1 v(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\widetilde{x}-\widetilde{y})\cdot \Psi'(\widetilde{x},\widetilde{y})\xi} b(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \xi)\theta_0(\widetilde{x} - \widetilde{y}) v(\widetilde{y})\, d\widetilde{y}\, d\xi, \tag{39}$$

где штрих возле Ψ означает транспозицию матрицы и

$$\widetilde{A}_2 v(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\widetilde{x}-\widetilde{y})\cdot \Psi'(\widetilde{x},\widetilde{y})\xi} b(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \xi)[1 - \theta_0(\widetilde{x} - \widetilde{y})] v(\widetilde{y})\, d\widetilde{y}\, d\xi. \tag{40}$$

Из этих двух операторов главным является $\widetilde{A}_1$. Мы покажем, что это ПДО из Ψ^m в амплитудном представлении, а $\widetilde{A}_2 \in \Psi^{-\infty}$.

ЛЕКЦИЯ 6.

Рассмотрим оператор (39). Поменяем местами интегралы по $\widetilde{y}$ и ξ и сделаем подстановку

$$\Psi'(\widetilde{x},\widetilde{y})\xi = \eta$$

во внутреннем интеграле. Затем снова поменяем местами интегралы. Получим

$$\widetilde{A}_1 v(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\widetilde{x}-\widetilde{y})\cdot\eta} b^{(1)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\eta) v(\widetilde{y})\, d\widetilde{y}\, d\eta, \tag{41}$$

где

$$b^{(1)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\eta) = b(\widetilde{x},\widetilde{y},\Psi'^{-1}(\widetilde{x},\widetilde{y})\eta)\cdot|\det\Psi(\widetilde{x},\widetilde{y})|^{-1}\theta_0(\widetilde{x}-\widetilde{y}). \tag{42}$$

Несложно проверить, что это амплитуда из S^m. Значит, $\widetilde{A}_1$ – ПДО из Ψ^m.

Перейдем к оператору (40). Его можно представить в виде

$$\widetilde{A}_2 v(\widetilde{x}) = \int k(\widetilde{x},\widetilde{y}) v(\widetilde{y})\, d\widetilde{y}, \tag{43}$$

где

$$k(\widetilde{x},\widetilde{y}) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\cdot\xi} b^{(2)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi)\, d\xi \tag{44}$$

с

$$b^{(2)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi) = b(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi)[1-\theta_0(\widetilde{x}-\widetilde{y})]. \tag{45}$$

Проверим, что это ядро из $K^{-\infty}$. Пока ясно, что оно непрерывно и равно нулю при больших $|\widetilde{x}|+|\widetilde{y}|$. Функция $b^{(2)}$ и равна нулю также при малых $|\widetilde{x}-\widetilde{y}|$. Это позволяет записать стоящую перед ней экспоненту в виде

$$e^{i(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\cdot\xi} = \frac{(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\partial_\xi}{i|\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y})|^2} e^{i(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\cdot\xi}.$$

Интегрируя по частям, мы заменяем $b^{(2)}$ на функцию из S^{m-1}. Повторяя эту процедуру, заменяем $b^{(2)}$ функцией из S^{m-N} с произвольно большим N. Отсюда видно, что $k\in C^\infty$ и, значит, $k\in K^{-\infty}$.

Итак, $\widetilde{A}_2\in\Psi^{-\infty}$ и $\widetilde{A}\in\Psi^m$.

Асимптотическое разложение символа этого ПДО записывается громоздкой формулой

$$\widetilde{a}(\widetilde{x},\eta)\sim\sum\frac{1}{\alpha!}\beta_1(\widetilde{x})\partial_\eta^\alpha D_{\widetilde{y}}^\alpha\Big\{a[\psi(\widetilde{x}),\Psi'^{-1}(\widetilde{x},\widetilde{y})\eta]\beta_2(\widetilde{y})\Big|\det\frac{\partial\psi(\widetilde{y})}{\partial\widetilde{y}}\Big|\cdot|\det\Psi(\widetilde{x},\widetilde{y})|^{-1}\Big\}\Big|_{\widetilde{y}=\widetilde{x}}. \tag{46}$$

Мы заменили $\theta_0(\widetilde{x}-\widetilde{y})$ на 1, так как эта функция равна 1 при малых $|\widetilde{x}-\widetilde{y}|$. Отметим, что определители берутся от взаимно обратных матриц при $\widetilde{y}=\widetilde{x}$. Главный член в (46) отвечает $\alpha=0$ и оказывается равным

$$\beta_1(\widetilde{x})a\Big[\psi(\widetilde{x}),\Big[\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial\widetilde{x}}\Big]'^{-1}\eta\Big]\beta_2(\widetilde{x}). \tag{47}$$

К этому важному выражению мы еще вернемся.

3. ПДО в соболевских пространствах

1. Соболевские пространства. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ рассматривалось в лекциях предыдущего семестра. Это пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме, определяемой равенством

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int |Fu(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi. \tag{1}$$

Множитель справа введен для того, чтобы при $s=0$ получалась норма в L_2: напомним, что равенство Парсеваля имеет вид

$$\int u(x)\overline{v(x)}\, dx = (2\pi)^{-n} \int Fu(\xi)\overline{Fv(\xi)}\, d\xi. \tag{2}$$

Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ сужается с ростом s и при $s > n/2$ состоит из непрерывных ограниченных функций (после их исправления, если понадобится, на множествах нулевой меры). С ростом s их гладкость повышается. При отрицательных s в эти пространства попадают обобщенные функции, не являющиеся обычными функциями.

Норма в $H^s(\mathbb{R}^n)$ допускает следующую запись:

$$\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|_0, \quad \text{где} \quad \Lambda^s = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}F, \tag{3}$$

это, как мы знаем, ПДО из Ψ^s.

В пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$ при любом s плотны бесконечно гладкие финитные функции.

Про оператор A, определенный на таких функциях и удовлетворяющий на них неравенству $\|Au\|_{m-s} \le C_s \|u\|_m$ при любом s, говорят, что он *действует в шкале соболевских пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ и имеет порядок m*. При каждом s такой оператор продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из $H^m(\mathbb{R}^n)$ в $H^{m-s}(\mathbb{R}^n)$.

Оператор порядка $-\infty$ – это оператор, действующий ограниченным образом из H^s в H^{s+N} со сколь угодно большим N при любом s.

2. Ограниченность ПДО в соболевских нормах.

Нам понадобится

Лемма Шура. *Рассмотрим интегральный оператор*

$$g(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy. \tag{4}$$

Предположим, что конечны верхние грани

$$\sup_x \int |K(x,y)|\, dy \quad и \quad \sup_y \int |K(x,y)|\, dx. \tag{5}$$

Тогда оператор (1) *ограничен в* $L_2(\mathbb{R}^n)$. *Более точно, имеет место неравенство*

$$\|g\|_0 \le \sqrt{M_1 M_2}\|f\|_0. \tag{6}$$

Доказательство. Имеем в силу неравенства Шварца

$$|g(x)|^2 \le \int |K(x,y)|\,dy \int |K(x,y)||f(y)|^2 dy \le M_1 \int |K(x,y)||f(y)|^2 dy.$$

Отсюда

$$\|g(x)\|^2 \le M_1 M_2 \|f\|^2. \quad \square$$

Теперь мы докажем важнейшую теорему об ограниченности ПДО в соболевских пространствах. Смысл ее состоит в том, что ПДО порядка m в прежнем смысле (т.е. принадлежащий Ψ_m) имеет порядок m в новом смысле – как оператор в соболевской шкале.

Теорема. *Пусть* A *– ПДО из* Ψ^m, $m \in \mathbb{R}$. *Тогда* A *– ограниченный оператор из* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *в* $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ *при всех* $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Все нужные неравенства достаточно доказывать на финитных бесконечно гладких функциях.

1. Утверждение теоремы сразу получается для ПДО Λ^s в силу формулы (3) и очевидного соотношения $\Lambda^s \Lambda^t = \Lambda^{s+t}$. Теперь *общий случай сводится к случаю* $s = m = 0$ следующим образом:

$$A = \Lambda^{m-s} A_1 \Lambda^s, \text{ где } A_1 = \Lambda^{s-m} A \Lambda^{-s} \in \Psi^0 \tag{7}$$

в силу теоремы о композиции. Далее будем предполагать, что $s = m = 0$.

2. *Пусть символ* $a = a(\xi)$ *не зависит от* x. В этом случае нам не нужна его гладкость, достаточна ограниченность: $|a(x,\xi)| \le C_1$. Имеем

$$\|Au\|_0^2 = (2\pi)^{-n} \int |a(\xi) Fu(\xi)|^2 \, d\xi \le C_1^2 (2\pi)^{-n} \int |Fu(\xi)|^2 \, d\xi = C_1^2 \|u\|_0^2. \tag{8}$$

Это замечание сделано только с целью пояснить, что в случае не зависящего от x доказательство совсем простое.

3. *Пусть* $a(x,\xi) = 0$ *при* $|x| \ge r$, *где* r *не зависит от* ξ. Положим $v(x) = (Au)(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}(Fv)(\eta) =& (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\cdot\eta} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)(Fu)(\xi)\, d\xi\, dx = \\ & (2\pi)^{-n} \int b(\eta-\xi,\xi)(Fu)(\xi)\, d\xi,\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$b(\eta,\xi) = \int e^{-ix\cdot\eta} a(x,\xi)\, dx.$$

Это интеграл по шару радиуса r, и все функции

$$\eta^\alpha b(\eta,\xi)=\int e^{-ix\cdot\eta}D_x^\alpha a(x,\xi)\,dx$$

ограничены. Можем написать

$$|b(\eta-\xi,\xi)|\le C_2(1+|\eta-\xi)|)^{-(n+1)}, \tag{10}$$

где *постоянная C_2 зависит только от r и* $\max_{x,\xi}|\partial_x^\alpha a(x,\xi)|$, $|\alpha|\le n+1$. Из неравенства (10) следует ограниченность оператора (9) в силу леммы Шура, и остается использовать равенство Парсеваля (2).

4. *Пусть* $a(x,\xi)\in S^{-\infty}$. Тогда A – интегральный оператор с непрерывным (даже бесконечно гладким) ядром, удовлетворяющим, в частности, неравенству

$$|k(x,y)|\le C_3|x-y|^{-n-1}, \tag{11}$$

и его ограниченность снова следует из леммы Шура.

5. *Общий случай.* Зафиксируем две функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такие, что $\varphi(x)$ неотрицательна, равна 1 при $|x|\le\sqrt{n}/2$ (это половина длины диагонали единичного куба в $\mathbb{R}^n$) и $\psi(x)$ равна 1 в окрестности носителя функции φ. Положим

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi(x-\alpha)\Big[\sum_\beta\varphi(x-\beta)\Big]^{-1},\quad \psi_\alpha(x)=\psi(x-\alpha), \tag{12}$$

где α пробегает целочисленную решетку в $\mathbb{R}^n$. Здесь сумма по β в каждой точке x положительна и состоит из конечного числа слагаемых, не превосходящего фиксированной постоянной. Функции φ_α образуют разбиение единицы. Мы имеем

$$A=\sum\varphi_\alpha A=A_1+A_2,\ \text{ где }\ A_1=\sum\varphi_\alpha A(1-\psi_\alpha)\cdot,\quad A_2=\sum\varphi_\alpha A\psi_\alpha\cdot. \tag{13}$$

Оператор A_1 состоит из слагаемых, принадлежащих $\Psi^{-\infty}$ в силу предложения 1 из лекции 5. Для ядер $k_\alpha(x,y)$ этих операторов справедливы оценки

$$|x-y|^N|\partial_x^\beta\partial_y^\gamma k_\alpha(x,y)|\le C_{\beta,\gamma,N} \tag{14}$$

с постоянными, не зависящими от α. Но в любой точке x отлично от нуля только конечное число ядер $k_\alpha(x,y)$, ограниченное не зависящей от x постоянной. Поэтому аналогичная оценка верна для $\sum k_\alpha(x,y)$. А это означает, что $A_1\in\Psi^{-\infty}$. Случай такого оператора уже рассмотрен в п. 4.

Остается доказать ограниченность оператора A_2. Используя неравенство Шварца, напишем

$$|A_2u(x)|^2\le\sum_\alpha\varphi_\alpha^2\sum_\beta|\psi_\beta A\psi_\beta u|^2$$

Первая сумма равномерно ограничена. В членах второй $\psi_\beta A$ – ПДО, к которым применим результат пункта 3, соответствующая оценка равномерна по β. Получаем

$$\|A_2u\|^2\le C\sum_\beta\|\psi_\beta A\psi_\beta u\|^2\le CC'\int\sum_\beta\psi_\beta^2(x)|u(x)|^2\,dx\le CC'C''\|u\|^2.\quad\square \tag{15}$$

ЛЕКЦИЯ 7

4. Полиоднородные ПДО

Этот пункт содержит подготовку к рассмотрению эллиптических ПДО. Мы определим подкласс Ψ^m_{ph} класса Ψ^m, такой, что в нем каждый ПДО имеет, в частности, однородный по ξ главный символ.

Положим

$$\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Введем сначала класс *однородных* символов. Пусть $b(x,\xi)$ – функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_0$. Условимся писать

$$b \in S^m_h = S^m_h(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_0), \tag{2}$$

если

1) для $b(x,\xi)$ выполнено условие *положительной однородности степени* m по ξ

$$b(x,\tau\xi) = \tau^m b(x,\xi) \quad (\tau > 0, \xi \neq 0) \tag{3}$$

и

2) справедливы (равномерные) оценки

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi b(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}|\xi|^{m-|\beta|} \quad (\xi \neq 0), \tag{4}$$

где постоянные не зависят от x, ξ.

Заметим, что такая функция не попадает в класс S^m, за исключением случая, когда m – натуральное число и это многочлен по ξ, однородный степени m (или $m = 0$ и b не зависит от ξ). Действительно, однородная функция от ξ, не являющаяся многочленом, имеет особенность в начале (если $m < 0$) или приобретает ее после достаточного числа дифференцирований по ξ.

Назовем теперь ПДО $A = a(x,D)$ из Ψ^m *полиоднородным* и будем писать $A \in \Psi^m_{ph} = \Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$, если

$$a(x,\xi) \approx a_0(x,\xi) + a_1(x,\xi) + \dots, \tag{5}$$

где $a_\nu \in S^{m-\nu}_h$, в следующем смысле:

$$\left|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \left[a(x,\xi) - \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu(x,\xi)\right]\right| \leq C_{\alpha,\beta,N}|\xi|^{m-|\beta|-N-1} \text{ при } |\xi| \geq C > 0, \tag{6}$$

где постоянные $C_{\alpha,\beta,N}$ не зависят от x, ξ. Символ $a(x,\xi)$ тоже будем называть *полиоднородным* и будем писать $a \in S^m_{ph} = S^m_{ph}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Простейший пример – оператор в частных производных (с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty$). В этом случае разложения (5) конечны.

Еще пример: Λ^m. Асимптотическое разложение символа $\langle\xi\rangle^m = (1+|\xi|^2)^{m/2}$ этого ПДО в смысле (5) строится с использованием биномиального ряда:

$$\langle\xi\rangle^m = |\xi|^m\big[1 + \frac{m}{2}|\xi|^{-2} + \frac{(m/2)(m/2-1)}{2!}|\xi|^{-4} + \dots\big],$$

где все члены ряда надо умножить на $|\xi|^m$. Это разложение является в данном случае сходящимся при $|\xi| > 1$ рядом.

Примеры символов из S^1, не являющихся полиоднородными:

$$\langle\xi\rangle + \langle\xi\rangle^{1/2}, \quad \langle\xi\rangle + \langle\xi\rangle^{1/2} \ln\langle\xi\rangle.$$

Функции a_ν в (5) очевидным образом определяются однозначно. Функция $a_0(x,\xi)$ называется *главным символом* ПДО $A = a(x,D)$ (по-английски *principal symbol*). Функция $a(x,\xi)$ называется *полным символом* (*complete symbol*). Условие *равномерной эллиптичности* этого ПДО состоит в том, что

$$|a_0(x,\xi)| \geq C|\xi|^m, \tag{7}$$

где C – положительная постоянная.

Например, оператор Лапласа Δ имеет главный символ $-|\xi|^2$ и, конечно, равномерно эллиптичен. Оператор Λ^m имеет главный символ $|\xi|^m$ и тоже равномерно эллиптичен.

Пусть $\theta(\xi)$ – бесконечно гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, равная 0 в окрестности начала и 1 вне большей окрестности. Тогда из (5) умножением на $\theta(\xi)$ получаем, что

$$a(x,\xi) \sim \theta(\xi)a_0(x,\xi) + \theta(\xi)a_1(x,\xi) + \dots. \tag{8}$$

Обратно, отсюда следует (5). Поэтому *по заданной последовательности* $\{a_\nu\}$ *однородных символов из* $S_h^{m-\nu}$ *строится полный символ с разложением* (5).

Если A и B – полиоднородные ПДО, то это же верно для их произведения $C = AB$, при этом его главный символ c_0 равен произведению $a_0 b_0$ главных символов ПДО A и B.

Если A – полиоднородный ПДО с главным символом a_0, то формально сопряженный оператор $A^{(*)}$ – тоже полиоднородный ПДО, с главным символом $\overline{a}_0$ (в скалярном случае). Аналогичное утверждение верно в отношении формально транспонированного оператора, его главный символ совпадает с a_0.

Если мы делаем диффеоморфную замену переменных $x = \psi(y)$ в полиоднородном ПДО с главным символом $a(x,\xi)$, то получаем полиоднородный ПДО с главным символом

$$\widetilde{a}_0(y,\eta) = a_0\big[\psi(y), \left[\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\right]^{\prime -1} \eta\big]. \tag{9}$$

Ср. с формулой (47) в лекции 6. Сейчас мы пишем y вместо $\widetilde{x}$ и имеем в виду те точки x, в которых $\alpha_j(x) = 1$, $j = 1,2$. Формула (9) будет использована при рассмотрении ПДО на многообразиях.

В доказательстве ограниченности ПДО в соболевских нормах было использовано довольно много производных символа. Сейчас мы займемся уточнением оценки нормы для полиоднородного ПДО. Мы выясним ее связь с верхней гранью модуля главного символа.

Начнем со случая $m = s = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $A \in \Psi^0_{ph}$, $M = \sup |a_0(x,\xi)|$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $C_\varepsilon \geq 0$, *что*

$$\|Au\|_0 \leq (M+\varepsilon)\|u\|_0 + C_\varepsilon \|u\|_{-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Положим $M_1 = M + \varepsilon/2$. Тогда $M_1^2 - |a_0(x,\xi)|^2 > 0$, и можно проверить, что

$$b_0(x,\xi) = [M_1^2 - |a_0(x,\xi)|^2]^{1/2} \in S^0_h.$$

Пусть B – полиоднородный ПДО с главным символом b_0. Тогда

$$M_1^2 - A^*A - B^*B = T \in \Psi^{-1}_{ph},$$

поскольку это ПДО из Ψ^0_{ph} с нулевым главным символом. Теперь имеем

$$(Au, Au)_0 + (Bu, Bu)_0 = M_1^2 (u,u)_0 - (Tu, u)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \|Au\|_0^2 \leq & M_1^2 \|u\|_0^2 + \|Tu\|_0 \|u\|_0 \leq \\ & (M + \frac{\varepsilon}{2})^2 \|u\|_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\|u\|_0^2 + \widetilde{C}_\varepsilon^2 \|Tu\|_0^2 \leq \\ & \left[(M+\varepsilon)\|u\|_0 + \widetilde{C}_\varepsilon \|Tu\|\right]^2, \end{aligned}$$

так что

$$\|Au\|_0 \leq (M+\varepsilon)\|u\|_0 + \widetilde{C}_\varepsilon C \|u\|_{-1}. \quad \square$$

Теперь мы рассмотрим полиоднородный ПДО порядка m.

Теорема 2. *Пусть* $A \in \Psi^m_{ph}$, $M = \sup_{x;|\xi|=1} |a_0(x,\xi)|$. *Тогда существует такое* $C_\varepsilon \geq 0$, *что при любом* s

$$\|Au\|_{s-m} \leq (M+\varepsilon)\|u\|_s + C_\varepsilon \|u\|_{m-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Положим $A_1 = \Lambda^{s-m} A \Lambda^{-s}$. Это ПДО из Ψ^0_{ph}. Если $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, то $v = \Lambda^s u \in H^0(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda^{-s} v = u$. Мы уже знаем, что

$$\|A_1 v\|_0 \leq (M+\varepsilon)\|v\|_0 + C_\varepsilon \|v\|_{-1}.$$

Эта оценка совпадает с доказываемой. $\square$

Теорема 3. *Пусть* A – *любой оператор, для которого при некотором* s *справедлива оценка*

$$\|Au\|_{s-m} \leq C_1 \|u\|_s + C_2 \|u\|_{s-1} \qquad (u \in H^s(\mathbb{R}^n)). \tag{12}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой оператор T, действующий ограниченным образом из пространства $H^t(\mathbb{R}^n)$ со сколь угодно большим по модулю отрицательным t в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, что

$$\|(A-T)u\|_{s-m} \le (C_1+\varepsilon)\|u\|_s. \tag{13}$$

При этом если A – ПДО порядка m, то T – ПДО порядка $-\infty$.

Доказательство. Пусть функция $\theta_0(\xi)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \theta_0(\xi) \le 1$ и $\theta_0(\xi) = 1$ при $|\xi| \le h$. Положим

$$\theta_0(D) = F^{-1}\theta_0(\xi)F, \quad T = A\theta_0(D), \quad v = [I-\theta_0(D)]u.$$

Мы имеем

$$[1-\theta_0(\xi)]^2/[1+|\xi|^2] \le (1+h^2)^{-1}.$$

Поэтому

$$\|(A-T)u\|_{s-m} = \|Av\|_{s-m} \le C_1\|v\|_s + C_2\|v\|_{s-1} \le (C_1 + C_2(1+h^2)^{-1/2})\|u\|_s.$$

Здесь переход от v к u возможен в силу связи образов Фурье этих функций и свойств функции $\theta_0(\xi)$. Остается учесть, что h можно взять сколь угодно большим. □

§3. Эллиптические ПДО в $\mathbb{R}^n$

Теорема 1. *Пусть A – равномерно эллиптический ПДО из $\Psi_{ph}^m(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует такой равномерно эллиптический ПДО B из $\Psi_{ph}^{-m}(\mathbb{R}^n)$, что*

$$BA = I + T_1, \quad AB = I + T_2, \tag{1}$$

где T_j – ПДО порядка $-\infty$. Главные символы ПДО a_0 и b_0 связаны формулой $b_0 = 1/a_0$.

Оператор B называется *двусторонним параметриксом*, или просто *параметриксом* для A.

Доказательство теоремы. Пусть символ a ПДО A имеет асимптотическое разложение

$$a \approx a_0 + a_1 + \dots. \tag{2}$$

Будем строить асимптотическое разложение символа b ПДО B

$$b \approx b_0 + b_1 + \dots, \tag{3}$$

исходя из первого из соотношений (1). В силу теоремы о композиции мы должны иметь

$$b_0 a_0 = 1,$$
$$b_1 a_0 + b_0 a_1 + \sum \partial_{\xi_j} b_0 \cdot D_{x_j} a_0 = 0,$$
$$b_2 a_0 + b_1 a_1 + \dots = 0$$

и т. д. Отсюда последовательно определяем

$$b_0 = a_0^{-1} \in S_h^{-m},$$
$$b_1 = a_0^{-1}[-b_0 a_1 - \sum \partial_{\xi_j} b_0 \cdot D_{x_j} a_0] \in S_h^{-m-1},$$
$$b_2 = a_0^{-1}[-b_1 a_1 + \ldots] \in S_h^{-m-2}$$

и т. д. При вычислении каждого b_j используется то обстоятельство, что предыдущие члены в разложении символа b уже определены. По асимптотическому разложению (3) строится символ b, чем определяется полиоднородный ПДО B_1 с точностью до слагаемого из $\Psi^{-\infty}$. ПДО $B = B_1$ принадлежит Ψ_{ph}^{-m}. Мы построили этот ПДО так, что $B_1 A = I + T_1$, где T_1 – ПДО порядка $-\infty$. Такой ПДО B_1 называется *левым параметриксом* для A.

Аналогично строится *правый параметрикс* B_2 – такой ПДО из Ψ_{ph}^{-m}, что $AB_2 = I + T_3$, где T_3 – ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Теперь имеем

$$B_1 A B_2 = (I + T_1)B_2 = B_1(I + T_3).$$

Из последнего равенства видно, что $B_1 - B_2 \in \Psi^{-\infty}$, так что оба ПДО B_1 и B_2 являются двусторонними параметриксами для A. □

Теорема 1 имеет важные следствия.

Теорема 2 (о повышении гладкости решений эллиптических уравнений). *Пусть A – равномерно эллиптический ПДО из Ψ_{ph}^m и $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$, где $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, а $f \in H^{s-m+t}(\mathbb{R}^n)$ с положительным t. Тогда $u \in H^{s+t}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Используя параметрикс B, имеем $BAu = Bf$, откуда

$$u = -T_1 u + Bf \in H^{s+t}(\mathbb{R}^n),$$

так как $T_1 u \in H^\infty(\mathbb{R}^n) = \cap H^r(\mathbb{R}^n)$. □

Этому утверждению мы в следующей лекции придадим локальную форму.

Теорема 3 (об априорной оценке). *Пусть A – равномерно эллиптический ПДО из Ψ_{ph}^m. Тогда*

$$\|u\|_s \le C(\|Au\|_{s-m} + \|u\|_{s-1}) \quad (u \in H_m(\mathbb{R}^n)). \tag{4}$$

Доказательство. Используя параметрикс, из соотношения $Au = f$ опять получаем

$$u = -T_1 u + Bf,$$

откуда

$$\|u\|_s \le \|T_1 u\|_s + \|Bf\|_s$$

и как следствие

$$\|u\|_s \le C_1 \|f\|_{s-m} + C_2 \|u\|_{s-1}. \quad \square$$

Отметим, что в последнем слагаемом норму $\|u\|_{s-1}$ можно заменить нормой любого порядка, меньшего s.

ЛЕКЦИЯ 8

Приведем локальный вариант теоремы о повышении гладкости решений. Но для простоты ограничимся случаем повышения гладкости "до бесконечности".

Теорема 4. *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ и $Au \in C^\infty(\Omega)$, где Ω – некоторая область в $\mathbb{R}^n$. Тогда $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать область Ω шаром. Пусть Ω_0 – концентрический шар меньшего радиуса. Достаточно показать, что $u \in C^\infty(\Omega_0)$ (после возможного исправления на множестве нулевой меры).

Построим последовательность функций φ_k с сужающимися носителями ($k = 1, 2, \dots$) так, что

$$\varphi_k = 1 \text{ в окрестности носителя } \operatorname{supp}\varphi_{k+1} \text{ и } \overline{\Omega} \supset \operatorname{supp}\varphi_k \supset \overline{\Omega}_0.$$

В частности, все φ_k равны 1 на Ω_0.

Заметим, что

$$\varphi_{k+1} A \varphi_k u = \varphi_{k+1} A u - \varphi_{k+1} A (1 - \varphi_k) u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

так как в первом члене справа $Au \in C^\infty$ на $\operatorname{supp}\varphi_{k+1}$, а во втором члене $\varphi_{k+1} A(1 - \varphi_k)\cdot \in \Psi^{-\infty}$.

Теперь проводим следующую индукцию. Имеем

$$\varphi_2 A \varphi_1 u = (\varphi_2 A - A\varphi_2)(\varphi_1 u) + A(\varphi_2 u). \tag{5}$$

Здесь справа $\varphi_2 A - A\varphi_2 \in \Psi^{m-1}$ и $\varphi_1 u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, так что первое слагаемое справа принадлежит $H^{s-m+1}(\mathbb{R}^n)$. Так как левая часть принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то по теореме 2 заключаем, что $\varphi_2 u \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$.

Далее, из соотношения

$$\varphi_3 A \varphi_2 u = (\varphi_3 A - A\varphi_3)(\varphi_2 u) + A(\varphi_3 u) \tag{6}$$

аналогично заключаем, что $\varphi_3 u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$, и т. д. В итоге $u \in H^\infty(\Omega_0)$. □

Заметим, что эллиптичность достаточно предполагать в Ω, так как из шара Ω_0 эллиптический в Ω главный символ ($a_0(x,\xi) \neq 0$ при $x \in \Omega$) можно продолжить до главного символа, равномерно эллиптического в $\mathbb{R}^n$.

Следствие. *Если $Au = f$ и A равномерно эллиптичен, то*

$$\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp} Au \tag{7}$$

и, значит,

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} Au, \tag{8}$$

поскольку обратное к (7) включение справедливо всегда.

Теперь мы покажем, что из априорной оценки (см. теорему 3) следует эллиптичность.

Теорема 5. *Пусть* $A \in \Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|u\|_s \le C(\|Au\|_{s-m} + \|u\|_{m-1}) \tag{9}$$

для функций u *из* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *при некотором* s *с носителями в некоторой окрестности* $O = O(x_0)$ *точки* x_0, *где* C *не зависит от* u. *Тогда главный символ* $a_0(x,\xi)$ *эллиптичен в точке* x_0:

$$a_0(x_0,\xi) \ne 0 \quad (\xi \ne 0). \tag{10}$$

Доказательство. Предположим, что $a_0(x_0,\xi_0) \ne 0$ при некотором $\xi_0 \ne 0$. Применим оценку (9) к функциям

$$u(x) = \varphi(x)e^{i\tau x\cdot\xi_0}, \ \ \tau > 0,$$

где

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|\varphi\|_0 = 1, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset O.$$

Имеем

$$\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|_0 = \|\Lambda^s(\varphi\cdot)(e^{i\tau x\cdot\xi_0})\|.$$

Пусть $b(x,\xi)$ – символ произведения $\Lambda^s(\varphi\cdot)$. Тогда по известной нам формуле для символа под знаком последней нормы стоит $b(x,\tau\xi_0)e^{i\tau x\cdot\xi_0}$. При этом

$$b(x,\xi) \approx \sum \frac{1}{\alpha! i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha (1+|\xi|^2)^{s/2} \cdot \partial_x^\alpha \varphi(x),$$

так что

$$b(x,\tau\xi_0) = \tau^s |\xi_0|^s \varphi(x) + O(\tau^{s-1}) \quad (\tau \to \infty). \tag{11}$$

Аналогично

$$\|Au\|_{s-m} = \|\Lambda^{s-m} Au\|_0,$$

и под знаком последней нормы стоит $c(x,\tau\xi_0)e^{i\tau x\cdot\xi}$, где $c(x,\xi)$ – символ оператора $\Lambda^{s-m}A(\varphi\cdot)$. Для него имеем

$$c(x,\tau\xi_0) = e^{i\tau x\cdot\xi_0}\tau^s|\xi_0|^{s-m}a_0(x,\xi_0)\varphi(x) + O(\tau^{s-1}).$$

Теперь оценка (9) дает

$$\tau^s|\xi_0|^s \le C\tau^s|\xi_0|^{s-m} \max_{x\in\operatorname{supp}\varphi} |a_0(x,\xi_0)| + O(\tau^{s-1}). \tag{12 М}$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi$ настолько мал, что на нем $C\max|a_0(x,\xi_0/|\xi_0|)| < 1$. Тогда при достаточно большом τ возникает противоречие. $\square$

§4. Псевдодифференциальные операторы на замкнутых многообразиях

1. Гладкое замкнутое многообразие. Рассмотрим n-мерное замкнутое многообразие M класса C^∞. Например, это может быть замкнутая бесконечно гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Не вдаваясь в совсем точное определение, напомним, что M – "достаточно хорошее" топологическое пространство, покрытое координатными окрестностями O. Каждая такая окрестность имеет карту – область U в $\mathbb{R}^n$ со взаимно однозначным отображением $x = \kappa(y)$ области U на O. Координаты y в U являются локальными координатами в O. Если координатные окрестности O_1 и O_2 пересекаются, то их прообразы на картах U_1 и U_2 – открытые множества и связывающее их отображение $\kappa_1^{-1}\kappa_2$ является бесконечно гладким диффеоморфизмом. Карты координатных окрестностей образуют атлас многообразия. Замкнутость многообразия означает его компактность (и отсутствие края). Компактность – это возможность выбрать из любого покрытия многообразия M открытыми множествами (в частности, координатными окрестностями) конечное подпокрытие. Эквивалентное условие состоит в том, что любая последовательность точек на M содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой его точке.

Замкнутая гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ как правило задается параметрически с разной (гладкой) параметризацией в разных местах, параметры – это и есть локальные координаты. Более общий пример замкнутого гладкого n-мерного многообразия (фактически самый общий) – замкнутая гладкая поверхность размерности n в $\mathbb{R}^N$, $N > n$.

Функция $f(x)$ на M называется бесконечно гладкой, если все функции $f(\kappa(y))$ на картах координатных окрестностей бесконечно гладкие. Эти функции образуют *пространство* $C^\infty(M) = \mathcal{E}(M)$. Аналогично определяются функции класса $C^N(M)$ с конечным $N \in \mathbb{Z}_+$. Частные производные определены локально в локальных координатах и зависят от их выбора. Как правило дифференциальный оператор на M нельзя определить сразу глобально.

Для каждого покрытия $\{O_k\}_k^K$ координатными окрестностями (или любыми открытыми множествами) существует подчиненное этому покрытию *разбиение единицы* – система функций $\{\varphi_k\}_1^K$ со свойствами

$$\varphi_k \in C^\infty(M), \quad \varphi_k \geq 0, \quad \operatorname{supp}\varphi_k \subset O_k, \quad \sum_1^K \varphi_k(x) \equiv 1. \tag{1}$$

В пространстве $C^N(M)$ можно ввести норму

$$\|f\|_N = \max_{k;y\in U_k;|\alpha|\leq N} |\partial_y^\alpha (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(y)]|. \tag{2}$$

Эта норма зависит от выбора разбиения единицы и локальных координат, но можно проверить, что при разных выборах получаются эквивалентные нормы. (Эквивалентность двух норм означает, что их отношение заключено между положительными постоянными.)

Пространство $\mathcal{E}'(M)$ определяется как пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{E}(M) = C^\infty(M)$.

Обсудим теперь вопрос об интегрировании по M. Определим *плотность* на M как совокупность бесконечно гладких положительных функций $\rho_U(y)$ на картах U, таких, что если координатные окрестности O и O' имеют непустое пересечение, то для точек на картах U и U', соответствующих точкам этого пересечения,

$$\rho_U(y)\,dy = \rho_{U'}(y')\,dy'. \tag{3}$$

Это означает, что

$$\rho_U[y(y')] = \rho_{U'}(y')\left|\det\frac{\partial y(y')}{\partial y'}\right|^{-1}. \tag{4}$$

Обычно плотность записывают так: $dx = \{\rho_U(y)\,dy\}$.

Теперь определим *интеграл* от функции $f(x)$ по M формулой

$$\int_M f(x)\,dx = \sum_1^K \int (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(y)]\rho_{U_k}(y)\,dy. \tag{5}$$

Здесь использованы разбиение единицы, состоящее из функций φ_k с носителями в координатных окрестностях O_k, плотность и локальные координаты в $U^{(k)}$. Но интеграл благодаря (4) зависит только от выбора плотности. Если, в частности, носитель функции f лежит в координатной окрестности O, то

$$\int_M f(x)\,dx = \int f(\kappa(y))\rho(y)\,dy. \tag{6}$$

Каждую непрерывную функцию $f(x)$ на M можно теперь отождествить с распределением, или обобщенной функцией, из $\mathcal{E}'(M)$ по формуле

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_M f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi\in\mathcal{E}(M). \tag{7}$$

Скалярное произведение на M определяется формулой

$$(f,g)_{0,M} = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{8}$$

Далее естественно определяется *пространство* $L_2(M)$ как гильбертово пространство, получаемое, например, пополнением пространства $C(M)$ непрерывных функций по соответствующей норме $\|u\|_{0,M} = (u,u)_{0,M}^{1/2}$. Можно определить и другие пространства $L_p(M)$, $1\le p\le\infty$.

Пример. Рассмотрим двумерную замкнутую поверхность S в $\mathbb{R}^3$. Пусть она локально задается уравнениями

$$x_j = x_j(t_1,t_2) \quad (j=1,2,3), \tag{9}$$

где функции справа бесконечно гладкие. Здесь t_1,t_2 – локальные координаты. Лебегова мера в $\mathbb{R}^3$ порождает лебегову меру на S, и "интеграл 1-го рода" по этой мере ("по площади на S") вычисляется по известной формуле

$$\int f(x)\,dS = \iint f(x_1(t_1,t_2),\dots)\sqrt{EG-F^2}\,dt_1\,dt_2, \tag{10}$$

где

$$E = \partial_{t_1} x \cdot \partial_{t_1} x, \quad F = \partial_{t_1} x \cdot \partial_{t_2} x, \quad G = \partial_{t_2} x \cdot \partial_{t_2} x. \tag{11}$$

При этом, как известно, величина $\sqrt{EG - F^2}$, зависящая от выбора параметризации, выражается через якобианы следующим образом:

$$\sqrt{EG - F^2} = \left[\left| \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right|^2 + \dots \right]^{1/2}.$$

В данном случае плотность есть $\{\sqrt{EG - F^2}\, dt_1\, dt_2\}$.

Замечание. При заданной плотности каждая точка на M имеет окрестность с такими локальными координатами y, что $\rho_U(y) \equiv 1$.

Действительно, пусть O – какая-нибудь координатная окрестность, в которой находится взятая точка, и $\widetilde{y}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ – локальные координаты в ней, $\widetilde{U}$ – соответствующая карта. Положим

$$y_1 = \widetilde{y}_1, \dots, y_{n-1} = \widetilde{y}_{n-1}, \quad y_n = \int_{\widetilde{y}_{n,0}}^{\widetilde{y}_n} \rho_{\widetilde{U}}(\widetilde{y}_1, \dots, \widetilde{y}_{n-1}, t)\, dt. \tag{12}$$

Тогда $\partial y / \partial \widetilde{y}$ – нижняя треугольная матрица с главной диагональю $(1, \dots, 1, \rho_{\widetilde{U}})$ и

$$dy = \left| \det(\partial y / \partial \widetilde{y}) \right| d\widetilde{y} = \rho_{\widetilde{U}}(\widetilde{y})\, d\widetilde{y},$$

так что $\rho_U(y)$ действительно равно 1.

Покрывая многообразие окрестностями с такими локальными координатами и выбирая конечное подпокрытие, получаем *специальный "малый" атлас из карт, согласованных с заданной плотностью так, что все* ρ_U *тождественно равны* 1. Формула (5) для интеграла при использовании этих карт принимает вид

$$\int_M f(x)\, dx = \sum_1^K \int (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(y)]\, dy. \tag{5'}$$

Соболевские пространства $H^s(M)$ вводятся следующим образом. Пусть $\{O_k\}$ – покрытие многообразия координатными окрестностями, и пусть $\{\psi_k\}_1^K$ – система функций со следующими свойствами:

$$\psi_k \in C^\infty(M), \quad \psi_k \geq 0, \quad \operatorname{supp} \psi_k \subset O_k, \quad \sum \psi_k > 0 \ \text{ на } \ M. \tag{13}$$

Для любого $s \in \mathbb{R}$ и любой функции $u \in C^\infty(M)$ положим

$$\|u\|_{s,M} = \left[\sum \|u\psi_k\|^2_{s,\mathbb{R}^n} \right]^{1/2}, \tag{14}$$

где подразумевается, что функция $u\psi_k$ продолжена с соответствующей карты на $\mathbb{R}^n$ нулем вне ее носителя и норма вычислена в $\mathbb{R}^n$. Пространство $H^s(M)$ определяется как пополнение пространства $C^\infty(M)$ по этой норме.

Очевидно, что это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{s,M} = \sum (u\psi_k, v\psi_k)_{s,\mathbb{R}^n}. \tag{15}$$

Разные выборы координатных окрестностей, локальных координат и системы функций ψ_k приводят к эквивалентным нормам. Эта система может быть, в частности, разбиением единицы:

$$\sum \psi_k(x) \equiv 1. \tag{16}$$

Другой полезный выбор этой системы: с условием

$$\sum \psi_k^2(x) \equiv 1. \tag{17}$$

В последнем случае, если пользоваться малым атласом из карт, согласованных с заданной плотностью,

$$(u,v)_{0,M} = \int_M u\overline{v}\, dx, \tag{18}$$

так что $H^0(M)$ полностью совпадает с $L_2(M)$.

Имеет место непрерывное вложение $H_s(M) \supset H_{s'}(M)$ при $s < s'$; более того, это вложение компактно (благодаря компактности M). При $s > n/2 + k$ имеем непрерывное вложение $H^s(M) \subset C^{(k)}(M)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому $H^\infty(M) = \cap H^s(M)$ можно отождествить с $C^\infty(M)$. Пространство $[H^s(M)]'$ непрерывных линейных функционалов над $H^s(M)$ можно отождествить 1) с $H^s(M)$, используя скалярное произведение (15), 2) с $H^{-s}(M)$, используя продолжение формы $(u,v)_{0,M}$ на $H^s(M) \times H^{-s}(M)$. Но этот второй вариант удастся обосновать только позднее. См. лекцию 11.

Некоторые подробности можно найти в лекциях предыдущего семестра.

Лекция 9

2. Определение ПДО на многообразии. Пусть M – замкнутое n-мерное бесконечно гладкое многообразие, и пусть A – оператор, действующий в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Через φ и ψ будем обозначать функции из $C^\infty(M)$.

Мы скажем, что A – ПДО из $\Psi^m(M)$, если выполнены два условия.

1. Для любых φ, ψ с не пересекающимися носителями $\varphi A(\psi\cdot)$ продолжается до оператора порядка $-\infty$ в соболевской шкале на M.

2. Если носители функций φ, ψ лежат в одной координатной окрестности O, то

$$\varphi A\psi u = \varphi A_U \psi u, \tag{19}$$

где A_U – ПДО из $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, зависящий только от O и выбора локальных координат в O.

Здесь и дальше подразумевается следующее. Слева u – любая функция из $C^\infty(M)$. Носители функций ψu лежат в O. После перехода к локальным координатам получаются функции на карте U, равные нулю вблизи границы карты. Они продолжаются на $\mathbb{R}^n$ нулем вне своих носителей. В правой части формулы (19) получается функция на $\mathbb{R}^n$ с носителем в U. Она переносится на O и продолжается нулем на M вне своего носителя.

В подтексте этого определения – теорема о том, что в $\mathbb{R}^n$ композиция вида $\varphi A(\psi\cdot)$, где A – ПДО, а φ и ψ – функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с не пересекающимися носителями, есть ПДО порядка $-\infty$, а главное, теорема о замене переменных в ПДО. В силу этих теорем только что данное определение ПДО на M корректно.

Выведем теперь формулу для представления ПДО A на M. Пусть $\{O_k\}_1^K$ – покрытие многообразия координатными окрестностями, а $\{\varphi_k\}_1^K$ – разбиение единицы, состоящее из бесконечно гладких функций и подчиненное этому покрытию. Пусть $A_k = A_{U_k}$ – ПДО из второго пункта определения, отвечающие O_k. Пусть ψ_k – функции из $C^\infty(M)$ с носителями в O_k, равные 1 в окрестности носителя функции φ_k. Тогда

$$A = \sum \varphi_k A = \sum \varphi_k A_k \psi_k \cdot + \sum \varphi_k A(1-\psi_k)\cdot$$

Последняя сумма – оператор порядка $-\infty$. Таким образом,

$$A = \sum \varphi_k A_k \psi_k \cdot + \dots, \tag{20}$$

здесь и дальше многоточием обозначается оператор порядка $-\infty$. Аналогичную формулу можно получить, умножая A на разбиение единицы справа:

$$A = \sum \psi_k A_k \varphi_k \cdot + \dots. \tag{21}$$

Из этих формул сразу следует

Теорема 1. *ПДО из $\Psi^m(M)$ действует ограниченным образом из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$.*

Действительно, достаточно воспользоваться аналогичным результатом для ПДО в $\mathbb{R}^n$.

Заметим еще, что любой оператор вида (20) или (21) – ПДО из $\Psi_m(M)$. Это следует из теоремы о замене переменных в ПДО.

Через $\Psi^{-\infty}(M)$ обозначим пересечение всех $\Psi^m(M)$ и через $\Psi^{\infty}(M)$ – объединение всех $\Psi^m(M)$. Заметим, что $\Psi^{-\infty}(M)$ совпадает с классом интегральных операторов

$$\int k(x,y)u(x)\,dx$$

с бесконечно гладкими ядрами. Можно показать, что он же совпадает с классом операторов порядка $-\infty$ в соболевской шкале M.

Полный символ ПДО как правило можно рассматривать только локально, в локальных координатах.

ПДО A из $\Psi^m(M)$ назовем *полиоднородным*, если все A_k – полиоднородные ПДО. Эти ПДО образуют класс $\Psi^m_{ph}(M)$.

Примерами могут служить операторы в частных производных с бесконечно гладкими коэффициентами (их запись обычно локальна и зависит от выбора локальных координат) и оператор умножения на бесконечно гладкую функцию, это ПДО из $\Psi^0_{ph}(M)$.

Будет показано, что полиоднородный ПДО имеет инвариантно определенный главный символ. Подготовка проводится в следующем пункте.

3. Касательное и кокасательное расслоения над M. Пусть U – область в $\mathbb{R}^n$ и в каждой ее точке y задан числовой столбец $\sigma(y)$ высоты n. Говорят, что это *контравариантный вектор* (точнее, поле контравариантных векторов), если при преобразовании координат $y \mapsto \widetilde{y} = \widetilde{y}(y)$ эти векторы преобразуются по правилу

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\partial \widetilde{y}(y)}{\partial y}\sigma. \tag{22}$$

Это преобразование имитирует линейную часть преобразования $y - y_0$ в $\widetilde{y} - \widetilde{y}_0$:

$$\widetilde{y} - \widetilde{y}_0 = \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y}\,(y - y_0) + \dots.$$

Поля контравариантных векторов образуют линейное пространство с инвариантно определенными (не зависящими от выбора координат) линейными операциями.

Если в U задана кривая $y = y(t)$, то касательные к ней векторы $dy(t)/dt$ контравариантны. Действительно, при переходе к координатам $\widetilde{y}$ уравнения кривой принимают вид $\widetilde{y} = \widetilde{y}(y(t))$, и

$$\frac{d\widetilde{y}}{dt} = \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Контравариантные векторы называются также тензорами типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теперь вспомним понятие поля *ковариантных векторов*, или *ковекторов*, или *тензоров порядка* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Это тоже вектор η высоты n, при этом требуется, чтобы стандартное скалярное произведение $\eta \cdot \sigma$ не зависело от выбора координат. Поэтому из равенства

$$\widetilde{\eta} \cdot \widetilde{\sigma} = \widetilde{\eta} \cdot \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} \sigma$$

следует правило преобразования координат ковектора

$$\widetilde{\eta} = \left(\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} \right)^{\prime -1} \eta. \tag{23}$$

Перейдем к понятиям касательной плоскости и касательного расслоения. Фиксируя точку x на M, рассмотрим пары (x, τ), где τ – контравариантные векторы, " выходящие из" x. Эти пары образуют *касательную плоскость* $T_x M$. Если M – гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, то это обычная касательная плоскость, состоящая из выходящих из x векторов, касательных к проходящим через x гладким кривым на M. Объединение

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \tag{24}$$

называется *касательным расслоением* многообразия M. Здесь касательные плоскости $T_x M$ и $T_{\hat{x}} M$ в разных точках x и $\hat{x}$ считаются не имеющими общих точек. Это бесконечно гладкое некомпактное многообразие с координатными окрестностями $O \times \mathbb{R}^n$ и преобразованиями локальных координат

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}(y), \quad \widetilde{\sigma} = \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} \sigma. \tag{25}$$

Кокасательная плоскость $T_x^* M$ состоит из пар (x, ξ), где ξ – ковекторы. Объединение

$$T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M \tag{26}$$

называется *кокасательным расслоением* многообразия M. Это бесконечно гладкое некомпактное многообразие с координатными окрестностями $O \times \mathbb{R}^n$ и преобразованиями координат

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}(y), \quad \widetilde{\eta} = \left(\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} \right)^{\prime -1} \eta. \tag{27}$$

4. Главный символ ПДО на многообразии. Вспомним, что при преобразовании координат – подстановке $\widetilde{y} = \widetilde{y}(y)$ главный символ ПДО преобразуется по формуле

$$\widetilde{a}_0(\widetilde{y}(y), \left(\frac{\partial \widetilde{y}(y)}{\partial y} \eta \right) = a(y, \eta).$$

Отсюда следует, что главный символ $a_0(x,\xi)$ ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$ имеет инвариантный смысл как функция на кокасательном расслоении T^*M, точнее, на $T^*M \setminus 0$ (из T^*M выбрасывается "нулевое сечение", состоящее из ковекторов $(x,0)$). Это положительно однородная по ξ функция степени m. Это означает, что "представители" $a_0(y,\eta)$ главного символа в локальных координатах положительно однородны степени m по η.

В частности, имеет смысл условие *эллиптичности*

$$a_0(x,\xi) \neq 0 \quad (\xi \neq 0). \tag{28}$$

Уже следующий член a_1 полного разложения символа не имеет инвариантного смысла. Но можно доказать, что так называемый *субглавный символ*

$$(\operatorname{sub} A) = a_1(x,\xi) - \frac{1}{2i}\sum \partial_{\xi_j}\partial_{x_j} a_0(x,\xi) \tag{29}$$

имеет инвариантный смысл, если договориться пользоваться только локальными координатами, согласованными с данной плотностью (все функции ρ_U равны единице).

Отметим еще, что на окружности S (длины 2π) естественно пользоваться периодической координатой. В этом случае полный символ имеет смысл как 2π-периодическая функция от x:

$$a(x+2\pi,\xi) = a(x,\xi). \tag{30}$$

Аналогично обстоит дело на торе $\mathbb{T}^n = S \times \cdots \times S$ – прямом произведении n окружностей.

5. Исчисление ПДО на многообразии. Все теоремы следуют из аналогичных теорем в $\mathbb{R}^n$, но проследить удается только за главными символами.

Теорема 1. *Пусть $A \in \Psi^{m_1}(M)$, $B \in \Psi^{m_2}(M)$. Тогда $C = BA \in \Psi^{m_1+m_2}(M)$. При этом если A и B полиоднородны, то C полиоднороден и его главный символ есть произведение главных символов ПДО B и A:*

$$c_0 = b_0 a_0. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть φ, ψ – две функции из $C^\infty(M)$ сначала с не пересекающимися носителями. Пусть функция χ из $C^\infty(M)$, равная 1 в окрестности носителя функции φ и такая, что носители функций χ и ψ не пересекаются. Тогда

$$\varphi B A \psi \cdot = \varphi B \chi A \psi \cdot + \varphi B (1-\chi) A \psi \cdot$$

Оба слагаемых справа принадлежат $\Psi^{-\infty}(M)$.

Пусть теперь носители обеих функций φ, ψ лежат в одной координатной окрестности, и пусть χ – функция из $C^\infty(M)$ с носителем в O, равная 1 в окрестности объединения носителей функций φ и ψ. Имеем

$$\varphi B A \psi \cdot = \varphi B \chi \chi A \psi \cdot + \varphi B (1-\chi^2) A \psi \cdot .$$

В первом слагаемом мы можем подставить вместо A и B соответствующие ПДО в $\mathbb{R}^n$, второе слагаемое принадлежит $\Psi^{-\infty}(M)$. Отсюда видно, что BA – ПДО из $\Psi^{m_1+m_2}(M)$, полиоднородный в случае полиоднородных A и B. Для проверки утверждения о главных символах достаточно предположить все три функции равными 1 в окрестности фиксированной точки. □

Пусть на многообразии зафиксирована (положительная бесконечно гладкая) плотность. Тогда определены скалярное произведение

$$(u,v)_0 = (u,v)_{0,M} = \int_M u\overline{v}\,dx$$

и форма

$$\langle u,v\rangle_0 = \langle u,v\rangle_{0,M} = \int_M uv\,dx, \tag{32}$$

и для каждого оператора A, действующего в $C^\infty(M)$, определены формально сопряженный оператор $A^{(*)}$ и формально транспонированный оператор $A^{(\prime)}$ соответственно формулами

$$(Au,v)_0 = (u,A^{(*)}v)_0 \ \text{ и } \ \langle Au,v\rangle_0 = \langle u,A^{(\prime)}v\rangle. \tag{33}$$

Теорема 2. *Пусть A – ПДО из $\Psi^m(M)$. Тогда $A^{(*)}$ и $A^{(\prime)}$ – тоже ПДО из $\Psi^m(M)$. Если A полиоднороден, то $A^{(*)}$ и $A^{(\prime)}$ тоже полиоднородны и их главные символы равны соответственно $\overline{a_0(x,\xi)}$ и $a_0(x,-\xi)$, где $a_0(x,\xi)$ – главный символ ПДО A.*

Доказательство. Проще всего воспользоваться малым атласом из окрестностей с локальными координатами, согласованными с заданной плотностью, и формулой (20):

$$A = \sum \varphi_k A_k \psi_k \cdot + \ldots,$$

здесь и дальше многоточием обозначен бесконечно сглаживающий оператор. Имеем

$$A^{(*)} = \sum \psi_k A_k^{(*)} \varphi_k, \quad A^{(\prime)} = \sum \psi_k A_k^{(\prime)} \varphi_k,$$

и т.д.

§5. Эллиптические ПДО на замкнутом многообразии

1 . Параметрикс для эллиптического ПДО.

Теорема 3. *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$. Тогда существует такой эллиптический ПДО B из $\Psi^{-m}_{ph}(M)$, что*

$$BA = I + \ldots \ \text{ и } \ AB = I + \ldots. \tag{1}$$

Главный символ b_0 ПДО B равен $1/a_0$, где a_0 – главный символ ПДО A.

Доказательство. Нам понадобятся два покрытия $\{O_k\}_1^N$ и $\{\widetilde{O}_k\}_1^N$ многообразия M со следующим свойством: если пересечение $O_k \cap O_l$ непусто, то объединение $O_k \cup O_l$ содержится в пересечении $\widetilde{O}_k \cap \widetilde{O}_l$.

Для каждого k найдем такой ПДО $A_k \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$, что для функций φ, ψ из $C^\infty(M)$ с носителями в $\widetilde{O}_k$

$$\varphi A\psi\cdot = \varphi A_k\psi\cdot$$

в соответствующих локальных координатах. Операторы A_k можно предположить равномерно эллиптическими. Заметим, что если носители функций φ, ψ лежат в $\widetilde{O}_k \cap \widetilde{O}_l$, то

$$\varphi A_k\psi\cdot = \varphi A_l\varphi\cdot\,. \tag{2}$$

Здесь слева и справа используются разные системы локальных координат. Теперь зафиксируем конечное разбиение единицы $\sum\varphi_k$, подчиненное покрытию $\{O_k\}$, и предположим, что носитель функции ψ_k лежит в O_k и что $\psi_k = 1$ в окрестности носителя функции φ_k. Мы имеем

$$A = \sum \psi_k A_k \varphi_k\cdot + \dots.$$

Пусть B_k –эллиптический параметрикс для A_k. Положим

$$B = \sum \varphi_l B_l \psi_l\cdot \tag{3}$$

и покажем, что это левый параметрикс для A. Имеем

$$BA = \sum\sum \varphi_l B_l\psi_l\psi_k A_k\varphi_k\cdot\,.$$

Здесь в каждом слагаемом или $\varphi_l\varphi_k$ – тождественный нуль. или объединение носителей функций ψ_k и ψ_l лежит в $\widetilde{O}_k\cap\widetilde{O}_l$. В последнем случае можно заменить A_k на A_l и переписать соответствующее слагаемое, используя (2), в виде

$$\varphi_l B_l\psi_l\psi_k A_l\varphi_k = \varphi_l B_l(1-\psi_l+\psi_l)(1-\psi_k+\psi_k)A_l\varphi_k+\dots = \varphi_l A_l B_l\varphi_k+\dots = \varphi_l\varphi_k+\dots.$$

Суммируя по k и l, получаем единичный оператор плюс бесконечно сглаживающий.

Далее, как в $\mathbb{R}^n$, строим правый параметрикс и проверяем, что оба являются двусторонними параметриксами. □

2. Следствия.

Теорема 4 (об априорной оценке). *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$. Тогда справедлива оценка*

$$\|u\|_{s,M} \le C_s(\|Au\|_{s-m,M} + \|u\|_{s-1,M}). \tag{4}$$

Теорема 5 (о повышении гладкости решений). *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$. Тогда если $u \in H^s(M)$, $Au \in H^{s-m+t}(M)$, где $t > 0$, то $u \in H^{s+t}(M)$.*

Лекция 10

Из теоремы о повышении гладкости следует, что *подпространство* $\mathrm{Ker}A$ *решений однородного эллиптического уравнения* $Au = 0$ *состоит из бесконечно гладких функций; в частности, оно не зависит от* s.

Теорема о повышении гладкости справедлива также в локальном варианте, например, таком:

Теорема 6. *Пусть* A *– эллиптический ПДО из* $\Psi^m_{ph}(M)$ *и* $u \in H^s(M)$, *так что* $Au \in H^{s-m}(M)$, *но* $Au \in C^\infty$ *в области* G *на* M. *Тогда* $u \in C^\infty(G)$.

Это следует из уже установленного аналогичного результата в $\mathbb{R}^n$.

Как и в $\mathbb{R}^n$, для обобщенной функции u на M определяется ее *сингулярный носитель* $\operatorname{sing\,supp} u$ – наименьшее замкнутое множество, вне которого она является бесконечно гладкой. Для произвольного ПДО A

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u. \tag{4}$$

Для эллиптического ПДО из теоремы 6 получается, что

$$\operatorname{sing\,supp} Au = \operatorname{sing\,supp} u. \tag{5}$$

Справедлива также теорема, обратная к теореме 5 об априорной оценке:

Теорема 7. *Пусть* A *– ПДО из* $\Psi^m_{ph}(M)$, *и пусть для функций* u *из* $H^s(M)$ *с носителями в окрестности* O *точки* x_0 *на* M *справедлива оценка*

$$\|u\|_{s,M} \le C(\|Au\|_{s,M} + \|u\|_{s-1,M}). \tag{6}$$

Тогда A *эллиптичен в* x_0: *главный символ* $a_0(x_0, \xi)$ *отличен от нуля на ненулевых кокасательных векторах в* x_0.

Действительно, можно предположить, что O – координатная окрестность, и перейти на карту, а в $\mathbb{R}^n$ такая теорема уже доказана.

Прежде чем переходить к основной теореме об эквивалентности эллиптичности и фредгольмовости, рассмотрим важный пример.

3. Оператор Бельтрами–Лапласа на римановом многообразии. Пусть M – риманово многообразие. Это значит, что на нем задана вещественная симметричная положительно определенная матрица $g(y) = (g_{ij}(y))$ в локальных координатах, которая при их изменении ведет себя как тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\widetilde{g}(\widetilde{y}) = \left(\frac{\partial y}{\partial \widetilde{y}}\right)' g(y(\widetilde{y})) \frac{\partial y}{\partial \widetilde{y}}. \tag{7}$$

При помощи этой матрицы вычисляется длина кривой на M: если для простоты кривая лежит в координатной окрестности и задается уравнениями

$y = y(t)$ в локальных координатах ($\alpha \le t \le \beta$), то длина вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta [y'(t)]' g(y(t)) y(t)]^{1/2}\, dt.$$

Далее, эта матрица определяет плотность

$$dx = \{\sqrt{\Theta(y)}\, dy\}, \quad \text{где} \quad \Theta(y) = \det g(y). \tag{8}$$

Если G – область на M, то ее риманов объем выражается интегралом $\int_G dx$.

Например, если M есть n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, локально заданная уравнениями

$$x^k = x^k(y^1, \dots, y^n) \quad (k = 1, \dots, N) \tag{9}$$

(индексы у координат сейчас пишутся наверху), то

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^i} \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^j} \quad (i, j = 1, \dots, n). \tag{10}$$

В случае двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ матрица $g(y)$ – это матрица

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Оператор Бельтрами–Лапласа определяется формулой

$$\Delta u(\kappa(y)) = \frac{1}{\sqrt{\Theta(y)}} \sum_{i,j=1}^n \partial_{y^i} \left[\sqrt{\Theta(y)} g^{ij}(y) \partial_{y^j} u(\kappa(y)) \right]. \tag{11}$$

Здесь $(g^{ij}(y))$ – матрица, обратная к матрице $g(y)$, это тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Главный символ оператора $-\Delta$ есть

$$\sum g^{ij}(y) \eta_i \eta_j,$$

это положительно определенная квадратичная форма, так что оператор эллиптичен. Кроме того, как нетрудно проверить, он формально самосопряжен.

4. Фредгольмовы операторы.

Определение. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства (можно было бы рассмотреть банаховы пространства) и A – оператор из H_1 в H_2, для простоты ограниченный. Он называется *фредгольмовым*, если выполнены следующие три условия.

1. Ядро KerA конечномерно.
2. Область значений $\operatorname{Im} A$ замкнута в H_2.
3. Она имеет в H_2 конечномерное дополнение $\operatorname{Coker} A$.

Разность

$$\varkappa(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A \tag{12}$$

называется *индексом* оператора A.

В литературе встречается также такая терминология: вместо "фредгольмов оператор" пишут "нётеров оператор", а фредгольмовым называют нётеров оператор с нулевым индексом.

Например, пусть $H_1 = H_2 = H$ и $A = I + T$, где I – единичный, а T – компактный операторы. Общеизвестно, что тогда A – фредгольмов оператор и $\varkappa(A) = 0$. Эта теорема доказывается в обязательном курсе функционального анализа или анализа-III. Главный пример – оператор $I + T$ в пространстве $L_2(G)$, где G – какая-нибудь область в $\mathbb{R}^n$ и T – интегральный оператор $\int_G K(x, y)u(y)\,dy$ с квадратично интегрируемым ядром.

Пусть A – ограниченный оператор из H_1 в H_2. Ограниченный оператор B из H_2 в H_1 назывется *левым параметриксом* для A, если

$$B_1 A = I_1 + T_1, \tag{13}$$

и *правым параметриксом*, если

$$AB_2 = I_2 + T_2. \tag{14}$$

Здесь и дальше I_j и T_j – единичный и компактный операторы в H_j, $j = 1, 2$. Если оператор B является левым и правым параметриксом, то он называется (двусторонним) параметриксом для A. Эти термины мы сравним с введенными раньше аналогичными терминами для ПДО в следующем пункте.

Если оператор A имеет левый и правый параметриксы B_1 и B_2, то оба они являются двусторонними параметриксами. Действительно, тогда

$$B_1 A B_2 = (I_1 + T_1)B_2 = B_1(I_2 + T_2),$$

и разность $B_1 - B_2$ оказывается компактным оператором, так как произведение ограниченного оператора на компактный компактно. Отсюда легко следует наше утверждение.

Предложение 1. 1.*Пусть оператор A имеет левый параметрикс. Тогда он имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений.* 2. *Пусть оператор A имеет правый параметрикс. Тогда он имеет замкнутую область значений.* 3. *Пусть оператор A фредгольмов. Тогда он имеет двусторонний параметрикс.*

Доказательство предложения 1. Пусть B_1 – левый параметрикс, так что можно пользоваться соотношением (13). Тогда

$$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(I_1 + T_1),$$

отсюда сразу следует, что $\operatorname{Ker} A$ конечномерно. Докажем теперь следующее вспомогательное предложение:

Предложение 2. *При наличии левого параметрикса на ортогональном дополнении* $(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$ *к ядру оператора* A *справедлива оценка*

$$\|u\|_1 \le C\|Au\|_2 \tag{15}$$

с не зависящей от u *постоянной.*

Доказательство предложения 2. Допустим, что оценка (15) неверна. Тогда существует такая последовательность элементов $u_n \perp \mathrm{KerA}$, что $\|u_n\|_1 = 1$ и $Au_n \to 0$. Из (13) следует, что $u_n + T_1 u_n \to 0$. Так как оператор T_1 компактен, а $\{Tu_n\}$ – ограниченная последовательность, то есть такая подпоследовательность индексов $\{n_k\}$, что последовательность $\{Tu_{n_k}\}$ фундаментальна. Пусть для простоты обозначений $\{Tu_n\}$ фундаментальна. Тогда и $\{u_n\}$ фундаментальна. Так как H_1 полно, то $\{u_n\}$ имеет предел u. Этот предел имеет единичную норму и ортогонален $\mathrm{Ker}\, A$. В то же время $Au = 0$. Это противоречие доказывает оценку (15).

Теперь проверим замкнутость области значений. Пусть $Au_n \to f$. Вычитая из u_n ортогональную проекцию на KerA, можно предположить, что $u_n \perp \mathrm{KerA}$. Используя оценку (15) с $u_n - u_m$ вместо u, получаем, что $\{u_n\}$ фундаментальна. Пусть $u_n \to u$. Тогда $Au_n \to Au$. Значит, $g = Au$. □

Из утверждения 2 проверим конечномерность коядра. Она видна из (14):

$$\mathrm{Im}\, A \supset \mathrm{Im}(I_2 + T_2).$$

Правая часть имеет конечномерное дополнение, значит, и левая.

Наметим план доказательства утверждения 3. Фредгольмов оператор A взаимно однозначно отображает $(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$ на ImA и в силу непрерывности имеет обратный (по теореме об обратном операторе), обозначим его B_0. Продолжим B_0 до оператора B, положив его равным нулевому оператору на $(\mathrm{Im}\, A)^{\perp}$. Учитывая компактность конечномерного оператора, можно показать, что B – параметрикс.

На самом деле справедливы утверждения, обратные к утверждениям 1 и 2.

5. Эквивалентность эллиптичности и фредгольмовости. Следующая теорема является основной в настоящем параграфе.

Теорема 8. *Пусть* A *– ПДО из* $\Psi^m_{ph}(M)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1°. *Оператор* A *эллиптичен.*

2°. *Оператор* A *имеет двусторонний параметрикс* $B \in \Psi^m_{ph}(M)$ *в смысле теории ПДО.*

3°. A *– фредгольмов оператор из* $H^s(M)$ *в* $H^{s-m}(M)$ *при любом* s.

4°. *При любом* s *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{s,M} \le C_s\left[\|Au\|_{s-m,M} + \|u\|_{s-1,M}\right]. \tag{16}$$

Более того, условие 3° *при некотором* s *равносильно этому условию при всех* s, *и то же верно для условия* 4°.

Доказательство. Мы уже знаем, что $1^\circ \Rightarrow 2$, $1^\circ \Rightarrow 4^\circ$ при всех s и $1^\circ \Leftarrow 4^\circ$ при каком-нибудь s.

Теперь заметим, что ПДО порядка $-\infty$ является компактным оператором из H^{s_1} в H^{s_2} при любых s_1 и s_2. Поэтому $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ при всех s.

Предположим, что выполнено условие 3° при некотором s. Тогда оператор A взаимно однозначно отображает $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ на $\operatorname{Im} A$ и по теореме об обратном операторе имеет непрерывный обратный. Поэтому на $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{s,M} \le C\|Au\|_{s-m,M}. \tag{17}$$

Пусть $\{u_j\}_1^N$ – базис в $\operatorname{Ker} A$, ортонормированный в смысле скалярного произведения в $H^s(M)$. Тогда любая функция из $H^s(M)$ представима в виде

$$u = \widetilde{u} + \sum (u, u_j)_{s,M} u_j,$$

где $\widetilde{u} \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Поэтому

$$\|u\|_{s,M} \le C[\|A\widetilde{u}\|_{s-m,M} + \sum |(u,u_j)_{s,M}| \|u_j\|_{s,M}] \le C'[\|Au\|_{s-m,M} + \sum |(u,u_j)_{s,M}|].$$

Заметим, что

$$|(u,v)_{s,M}| \le C''\|u\|_{s-1,M}\|v\|_{s+1,M}, \tag{18}$$

этот вариант обобщенного неравенства Шварца поясним немного ниже. Поэтому получаем (16). Из (16), как мы уже знаем, следует эллиптичность оператора A.

Осталось проверить неравенство (18). При его проверке можно заменить u и v функциями φu и ψv, где φ и ψ – бесконечно гладкие функции с носителями в некоторой координатной окрестности. Считая локальные координаты согласованными с заданной плотностью, можем перейти на карту. В $\mathbb{R}^n$ нужное неравенство проверяется элементарно, например, при помощи преобразования Фурье. $\square$

Дополнительные замечания. 1. *Если* $\operatorname{Ker} A = 0$, *то априорная оценка верна в форме* (17).

Это следует, например, из предложения 2.

2. *Пусть эллиптический ПДО* $A \in \Psi_{ph}^m(M)$ *имеет обратный* A^{-1} *при всех* s. *Тогда* A^{-1} *– эллиптический ПДО из* $\Psi_{ph}^{-m}(M)$.

Действительно, если B – параметрикс, то

$$BAA^{-1} = (I + T_1)A^{-1} = B,$$

откуда видно, что $A^{-1} - B$ – оператор порядка $-\infty$.

3. Ядро эллиптического оператора состоит из бесконечно гладких функций и не зависит от s. Но еще предстоит показать, что индекс не зависит от s и что обратимость эллиптического оператора при каком-нибудь s влечет обратимость при всех s.

6. Сопряженный оператор. Пусть A – ПДО из $\Psi^m(M)$, и пусть сначала $m \le 0$. Тогда A и $A^{(*)}$ – ограниченные операторы в $L_2(M)$ и равенство

$$(Au, v)_{0,M} = (u, A^{(*)}v)_{0,M}. \tag{19}$$

верно для функций u, v из $H^m(M)$. Оно означает, что *оператор $A^{(*)}$ сопряжен к A в смысле теории операторов в гильбертовом пространстве.* В дальнейшем будем записывать его в виде A^*, без скобок в показателе.

Пусть теперь $m > 0$. Тогда A – неограниченный оператор в $L_2(M)$. Его областью определения $D(A)$ является пространство $H^m(M)$. Если A замкнут, то ввиду плотности в $L_2(M)$ его области определения он имеет сопряженный A^* в смысле теории операторов в гильбертовом пространстве.

Теорема 9. *Пусть оператор $A \in H^m_{ph}(M)$, $m > 0$, эллиптичен. Тогда это замкнутый оператор в $L_2(M)$. Сопряженный оператор A^* совпадает с формально сопряженным $A^{(*)}$ и имеет ту же область определения $H^m(M)$.*

Доказательство. Проверим замкнутость. Пусть $u_l \in H^m(M)$, $u_l \to u$ в $H^0(M)$ и $Au_l \to f$ в $H^0(M)$. Тогда $Au_n \to Au$ в $H^{-m}(M)$, так что $Au = f$ в $H^{-m}(M)$. Но так как $f \in H^0(M)$, то по теореме о повышении гладкости $u \in H^m(M)$. Таким образом, $u \in D(A)$ и $Au = f$. Это и означает, что оператор A замкнут.

Мы имеем $v \in D(A^*)$ и $A^*v = g$, если

$$(Au, v)_{0,M} = (u, g)_{0,M} \ \text{ для } \ u \in H^m(M). \tag{20}$$

Временно обозначим оператор $A^{(*)}$ через B. Имеем

$$(Au, v)_{0,M} = (u, Bv)_{0,M} \ \text{ для } \ u, v \in H^m(M). \tag{21}$$

Это проверяется аппроксимацией функций u и v бесконечно гладкими функциями.

Из сравнения (20) и (21) видно, что $D(B) = H^m(M) \subset D(A^*)$ и $A^* = B$ на $D(B)$.

С другой стороны, если $v \in D(A^*)$ и $A^*v = g$ в $H^0(M)$, то $Bv = g$ в $H^{-m}(M)$. Но $g \in H^0(M)$ и B эллиптичен, так что в силу теоремы о повышении гладкости $v \in H^m(M)$. Таким образом, установлено обратное включение $D(A^*) \subset D(B)$ и совпадение этих двух операторов. □

Скобки в показателе мы теперь будем опускать и будем писать (для эллиптических A) A^* вместо $A^{(*)}$.

Лекция 11

7. Простейшие спектральные свойства ПДО. В этом пункте мы будем рассматривать псевдодифференциальный оператор как оператор в $L_2(M)$.

Согласно известным определениям, *резольвентное множество* $\rho(A)$ оператора A в гильбертовом пространстве H – это множество таких точек λ на комплексной плоскости, что оператор $A-\lambda I$ имеет ограниченный обратный

$$R_A(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1},$$

называемый *резольвентой* оператора A в точке λ. Это открытое множество; дополнение $\sigma(A)$ к нему замкнуто и называется *спектром* оператора A. В интересующем нас сейчас случае $H=H^0(M)$.

Если ПДО A из $\Psi^m(M)$ имеет отрицательный порядок m, то он компактен в $H^0(M)$, так как действует ограниченным образом из $H^0(M)$ в $H^{-m}(M)$, а $H^{-m}(M)$ вложено в $H^0(M)$ компактно. Спектр такого оператора состоит из нуля и изолированных ненулевых собственных значений, каждому ненулевому собственному значению отвечает конечномерное *корневое подпространство*, состоящее из соответствующих этому собственному значению собственных и присоединенных векторов и нуля. Собственные значения могут скапливаться только к нулю. Точка 0 может быть или не быть собственным значением, но оператор A не фредгольмов в $H^0(M)$ (хотя фредгольмов как оператор из $H^0(M)$ в $H^{-m}(M)$): его область значений незамкнута в $H^0(M)$. Точки λ, такие, что оператор $A-\lambda I$ в гильбертовом пространстве H не является фредгольмовым, называются точками *существенного спектра* оператора A. Таким образом, 0 – точка существенного спектра ПДО отрицательного порядка.

При $m=0$ полиоднородный ПДО имеет существенный спектр, состоящий из значений λ главного символа $a_0(x,\xi)$. Действительно, главный символ ПДО $A-\lambda I$ равен $a_0(x,\xi)-\lambda$, и при таких λ этот оператор не эллиптичен, значит, не фредгольмов в $H^0(M)$.

При $m>0$ эллиптический ПДО A может иметь непустое резольвентное множество. Если это так и λ принадлежит ему, то резольвента $R_A(\lambda)$ компактна в $H^0(M)$, так что A – *оператор с компактной резольвентой*. Спектр такого оператора, как известно, состоит из изолированных собственных значений, которые могут скапливаться только к бесконечности. Каждому собственному значению отвечает конечномерное корневое подпространство. Про операторы с такими свойствами говорят, что они имеют *дискретный спектр*.

Если $A=A^*$, то оператор A называется *самосопряженным*. Спектр такого оператора лежит на вещественной оси, присоединенных векторов нет. Если A – самосопряженный компактный оператор в H, то он имеет ортонормированный базис из собственных векторов. Аналогично обстоит дело в случае самосопряженного оператора с компактной резольвентой.

Из сказанного следует, что самосопряженный ПДО отрицательного порядка имеет ортонормированный базис из собственных функций в $H^0(M)$. Если A эллиптичен, то, используя теорему о повышении гладкости, легко проверить, что собственные функции принадлежат $C^\infty(M)$. Если A – эллиптический ПДО

положительного порядка, то автоматически это оператор с компактной резольвентой и ортонормированным базисом из собственных функций. И снова легко проверяется, что они принадлежат $C^\infty(M)$.

Примером самосопряженного эллиптического оператора (порядка 2) является оператор Бельтрами–Лапласа на римановом многообразии.

Если ПДО A ненулевого порядка эллиптичен, но не является самосопряженным оператором, то его собственные и присоединенные функции принадлежат $C^\infty(M)$. Это следует из того, что они принадлежат ядрам эллиптических операторов $(A-\lambda I)^k$ с натуральными k.

Но здесь при нецелом m приходится несколько расширить класс рассматриваемых ПДО и допустить, что в асимптотическом разложении символа порядки слагаемых не обязательно отличаются от m на целое число. Подробно на этом останавливаться не будем.

8. Самосопряженный обратимый эллиптический ПДО.

Теорема 9. *Пусть t -любое вещественное число и $a_0(x,\xi)$ – бесконечно гладкая положительная функция на $T^*M\setminus 0$, положительно однородная степени t. Тогда существует обратимый самосопряженный ПДО A из $\Psi^t_{ph}(M)$ с главным символом a_0, взаимно однозначно и непрерывно отображающий $H^t(M)$ на $H^0(M)$.*

Доказательство. Зафиксируем конечное покрытие $\{O_k\}_1^K$ многообразия M координатными окрестностями и подчиненное ему разбиение единицы $\sum\varphi_k=1$, состоящее из бесконечно гладких функций. Пусть ψ_k – бесконечно гладкие функции с носителями в O_k, равные 1 в окрестностях носителей функций φ_k. Перенося функцию $a_0(x,\xi)$ на соответствующие карты, строим там ПДО $A^{(k)}$ в локальных координатах с этим главным символом. Полагаем сначала

$$A_0=\sum\varphi_kA^{(k)}\psi_k\cdot.$$

Это эллиптический ПДО на M с главным символом a_0. Полагаем

$$A_1=\operatorname{Re}A_0=\tfrac12(A_0+A_0^*).$$

Это самосопряженный эллиптический ПДО с тем же главным символом. Если его ядро $\operatorname{Ker}A_1$ тривиально, то он обратим. Пусть оно нетривиально. Тогда оно конечномерно и состоит из бесконечно гладких функций; возьмем в нем ортонормированный базис $\{e_j(x)\}$. Положим

$$A=A_1+\sum(\cdot,e_k)_{0,M}e_k.$$

Этот ПДО отличается от A_1 на бесконечно сглаживающий оператор, так что это эллиптический ПДО с тем же главным символом, и он остается самосопряженным. Проверим, что его ядро тривиально. Оно состоит из бесконечно гладких функций. Представим любую функцию из него в виде $u=v+w$, где $v\perp\operatorname{Ker}A_1$ и $w\in\operatorname{Ker}A_1$. Тогда $v,w\in C^\infty(M)$ и

$$Au=A_1v+\sum(w,e_k)_{0,M}e_k.$$

Здесь

$$(A_1 v, e_k)_{0,M} = (v, A_1 e_k) = 0,$$

так что

$$Av \in (\operatorname{Ker} A_1)^\perp, \quad \sum (w, e_k)_{0,M} e_k \in \operatorname{Ker} A_1.$$

Поэтому если $Au = 0$, то $A_1 v = 0$ и $Aw = w$, так что $w = 0$. Но A_1 не может аннулировать нетривиальные элементы из $(\operatorname{Ker} A_1)^\perp$, поэтому и $v = 0$.

Итак, A осуществляет нужный изоморфизм. □

В будущем мы покажем, что такие изоморфизмы можно установить при помощи степеней одного эллиптического ПДО порядка 1.

Теорема 10. *Скалярное произведение $(u, v)_{0,M}$ в $H^0(M)$ продолжается до непрерывной формы на $H^s(M) \times H^{-s}(M)$ и удовлетворяет обобщенному неравенству Шварца*

$$(u, v)_{0,M} \le C_s \|u\|_{s,M} \|v\|_{-s,M}. \tag{22}$$

Эта форма при $v \in H^{-s}(M)$ дает общий вид линейного непрерывного функционала над $H^s(M)$.

Доказательство. Продолжимость формы и неравенство (22) выводятся из аналогичных результатов в $\mathbb{R}^n$. Из (22) следует, что элементы v из $H^{-s}(M)$ определяют линейные непрерывные функционалы $(u, v)_{0,M}$ над $H^s(M)$. Что это общий вид линейного непрерывного функционала над $H^s(M)$, проверяется при помощи теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве $H = H^0(M)$ и предыдущей теоремы. Ср. лекции предыдущего семестра. □

9. Роль ядра ПДО A^*. В элементарной теории линейных операторов доказывается, что если A – оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения, то сопряженный оператор A^* существует, его ядро $\operatorname{Ker} A^*$ замкнуто и

$$H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A^*. \tag{23}$$

Теорема 11. *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$. Рассмотрим его как оператор из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$. Справедлива формула*

$$H^{s-m}(M) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^*, \tag{24}$$

где ортогональность имеет место относительно формы $(u, v)_{0,M}$, продолженной на $H^{s-m}(M) \times H^{m-s}(M)$.

Поясним, что здесь $\operatorname{Im} A$ замкнута в $H^{s-m}(M)$, а $\operatorname{Ker} A^*$ конечномерно и не зависит от s, так как A^* эллиптичен вместе с A. Существенно, что мы можем рассматривать A^* во всей соболевской шкале, обычного понятия сопряженного оператора в гильбертовом пространстве тут недостаточно.

Доказательство теоремы 11. Если $m \ge 0$ и $s = m$, то формула (24) непосредственно следует из формулы (23).

Этот результат означает, что в случае $m \geq 0$ уравнение $Au = f$ с $f \in H^0(M)$ имеет решение $u \in H^m(M)$ тогда и только тогда, когда $A^* f = 0$. Сейчас мы обобщим этот результат на произвольные m и s.

Оператор из теоремы 9 обозначим через Λ_t. Уравнение $Au = f$ эквивалентно уравнению

$$Bv = g, \text{ где } B = \Lambda_{s-m} A \Lambda_s^{-1}, \ v = \Lambda_s u, \ g = \Lambda_{s-m} f.$$

Здесь B – эллиптический ПДО порядка 0 и $v, g \in H^0(M)$. Для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(g, w)_{0,M} = 0 \text{ при } B^* w = 0,$$

т.е. (полагаем $h = \Lambda_{s-m} w$)

$$(\Lambda_{s-m} f, w)_{0,M} = 0 \text{ при } \Lambda_s^{-1} A^* \Lambda_{s-m} w = 0,$$

т.е.

$$(f, h)_{0,M} = 0 \text{ при } A^* h = 0.$$

Именно эти условия и надо было получить. □

Следствие. *Индекс эллиптического ПДО A выражается формулой*

$$\varkappa(A) = \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Ker} A^*. \tag{25}$$

Он не зависит от s.

10. Дальнейшие свойства индекса. Пусть H_1, H_2, H_3 – гильбертовы пространства.

Предложение 3. *Пусть $A_1 : H_1 \mapsto H_2$, $A_2 : H_2 \mapsto H_3$ – фредгольмовы операторы. Тогда $A_2 A_1 : H_1 \mapsto H_3$ – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(A_2 A_1) = \varkappa(A_2) + \varkappa(A_1). \tag{26}$$

Это утверждение доказывается во многих книгах. Возможно, мы докажем его в начале следуюшего семестра.

Предложение 4. *Пусть $A : H_1 \mapsto H_2$ – фредгольмов оператор и $B : H^2 \mapsto H^1$ –параметрикс для A. Тогда B – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(B) = -\varkappa(A). \tag{27}$$

Первое утверждение доказывать не будем, для эллиптических A оно очевидно. Формула (27) следует из (26), так как произведение BA имеет нулевой индекс.

Предложение 5. *Пусть A – фредгольмов и T – компактный операторы из H_1 в H_2. Тогда $A + T$ – фредгольмов оператор из H_1 в H_2 и*

$$\varkappa(A + T) = \varkappa(A). \tag{28}$$

Это следует из того, что параметрикс B для A остается параметриксом для $A+T$.

Предложение 6. *Пусть A – (ограниченный) фредгольмов оператор из H_1 в H_2. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что если ΔA – оператор из H_1 в H_2 с нормой $\|\Delta A\| < \varepsilon$, то $A + \Delta A$ – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(A + \Delta A) = \varkappa(A). \tag{29}$$

Доказательство. Пусть B – параметрикс для A. Тогда

$$B(A + \Delta A) = BA + B\Delta A = I_1 + T_1 + B\Delta A.$$

Пусть

$$\|B\|\|\Delta A\| < 1.$$

Тогда существует $(I_1 + B\Delta A)^{-1}$ и

$$(I_1 + B\Delta A)^{-1}B(A + \Delta A) = I_1 + (I + B\Delta A)^{-1}T_1.$$

Последнее слагаемое компактно, так что $(I_1+B\Delta A)^{-1}B$ – левый параметрикс для $A + \Delta A$. Правый строится аналогично, так что можно взять $\varepsilon = \|B\|^{-1}$. Любой обратимый оператор имеет нулевой индекс, так что индекс построенного параметрикса такой же, как у B. Отсюда и из предложения 4 следует (29).

Предложение 7. *Пусть A – фредгольмов оператор из H_1 в H_2 с нулевым индексом. Тогда существует такой конечномерный оператор T, что $A + T$ обратим.*

Доказательство (ср. с частью доказательства теоремы 6). Пусть $u_1, \ldots, u_m$ – базис в $\operatorname{Ker} A$ и $v_1, \ldots, v_n$ – базис в $\operatorname{Ker} A^*$. Положим $Tu_j = v_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, $T = 0$ на $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ и распространим T на H_1 по линейности. Это конечномерный оператор, так что он компактен и $A + T$ сохраняет нулевой индекс. Теперь достаточно проверить, что $A + T$ имеет тривиальное ядро.

Пусть h – элемент этого ядра. Пусть $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathrm{KerA}$ и $h_2 \perp \operatorname{Ker} A$. Тогда

$$(A + T)h_1 = Th_1, \quad (A + T)h_2 = Ah_2, \quad Th_1 \perp Ah_2,$$

так что $Th_1 = 0$ и $Ah_2 = 0$. Отсюда следует, что $h_1 = 0$, а также что $Ah_2 = 0$ и $h_2 = 0$ (см. предложение 2). $\square$